

Теория вероятностей и математическая статистика

29 ноября 2015 г.

Содержание

- 1 Критерий Пирсона
 - Многомерная форма ЦПТ
 - Теорема Пирсона
 - Примеры
 - Гипотеза о независимости выборок
 - Закон Хаббла

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^K$ -случайные векторы и $x \otimes y = |x\rangle\langle y|$ -случайная $(K \times K)$ -матрица ранга 1 с компонентами $x_i y_j$, называемая *тензорным* или *внешним* произведением. Нетрудно видеть, что

$$(h, x \otimes y g) = (h, |x\rangle\langle y| g) = (h, x)(y, g),$$

причем в вещественном случае скалярное произведение симметрично: $(x, h) = (h, x)$. *Ковариационной матрицей* векторозначной с. в. $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^K$ называется

$$R = \mathbb{E}(x - \mathbb{E}x) \otimes (x - \mathbb{E}x) : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^K$$

с компонентами $R_{i,j} = \mathbb{E}(x_i - \mathbb{E}x_i)(x_j - \mathbb{E}x_j)$. Поэтому для любых векторов $g \in \mathbb{R}^K$ имеет место неравенство

$$(g, Rg) = \mathbb{E} \left| \sum_k ((x_k - \mathbb{E}x_k), g) \right|^2 \geq 0,$$

показывающее, что матрица R неотрицательно определена.

Упражнение 1

Пусть $R > 0$ и ξ – гауссова с. в. с нулевым средним и пусть

$$P(\xi \in B) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{K/2} \sqrt{\det R}} \int_B e^{-\frac{1}{2}(x, R^{-1}x)} d^K x. \quad (1)$$

Показать, что $\mathbb{E}(h, \xi)(g, \xi) = (h, \mathbb{E} \xi \otimes \xi g) = (h, Rg)$

$\forall g, h \in \mathbb{R}^K$, то есть R в (1) имеет смысл ковариационной матрицы с. в. ξ , а ее характеристическая функция равна

$$h(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} e^{i(u, \xi)} = e^{-\frac{1}{2}(u, Ru)}. \quad (2)$$

Для случайных величин с невырожденными ковариационными матрицами имеет место многомерный аналог ЦПТ:

Лемма 1

Пусть x – векторнозначная с. в. с невырожденной ковариационной матрицей R и $\langle x \rangle_N$ – выборочное среднее. Тогда для любого измеримого $B \subseteq \mathbb{R}^K$ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(\sqrt{N}(\langle x \rangle_N - \mathbb{E}x) \in B) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} \sqrt{\det R}} \int_B e^{-\frac{1}{2}(x, R^{-1}x)} dx.$$

Эта версия ЦПТ играет важную роль в рассматриваемом ниже доказательстве *теоремы Пирсона*. Нетривиальным отличием от стандартной формулировки ЦПТ является возможность ее применения в вырожденном случае.

Теорема Пирсона

В предыдущей лекции были рассмотрены статистические критерии проверки гипотез для выборок произвольного объема, основанные на предположении о нормальном распределении ошибок. Метод Пирсона позволяет отказаться от гипотезы о виде распределения. Вместо этого предполагается, что объем выборки достаточно велик и используется асимптотическая нормальность вводимых ниже случайных величин.

Рассмотрим д. с. в. $\xi \in \Omega = \sqcup \{\Omega_k\}_{k=1}^K$, $P(\xi \in \Omega_k) = p_k$, $\sum_{k=1}^K p_k = 1$. Если исход последующего наблюдения не зависит от предыдущих, то вероятность того, что в серии из N испытаний произойдет n_k событий $\xi \in \Omega_k$, равна

$$p_N(k) = C_N^{n_k} p_k^{n_k} (1 - p_k)^{N - n_k}$$

со средним $\mu_k = N p_k$ и дисперсией $\sigma_k^2 = N p_k (1 - p_k)$.

Выборочная оценка вероятности этого события равна

$$\langle p(k) \rangle_N \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_k}{N}.$$

Если числа p_k являются вероятностями событий $\xi \in \Omega_k$, то $\mathbb{E}\langle p(k) \rangle_N = \frac{\mathbb{E}n_k}{N} = p_k$, а д. с. в.

$$z_N(k) = \frac{n_k - \mu_k}{\sigma_k} = \frac{n_k - p_k N}{\sqrt{N p_k (1 - p_k)}} \approx \frac{n_k - p_k N}{\sqrt{N p_k}} \quad (3)$$

имеют нулевое среднее и единичную дисперсию и в силу теоремы Муавра–Лапласа или ЦПТ вероятность $P(z_N(k) \in B)$, $B \in \mathbb{R}$, при $N \rightarrow \infty$ сходится к нормальному закону:

$$P(z_N(k) \in B) \approx P(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B e^{-x^2/2} dx.$$

Приближенное равенство (3) имеет место при малых p_k . Это наблюдение существенным образом уточняется в теореме Пирсона.

Теорема 1

Пусть множество Ω значений случайной величины x разбито на K непересекающихся подмножеств $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^K \Omega_k$,

$p_k = P(x \in \Omega_k)$ – вероятность события $x \in \Omega_k$,

$n_k = \sum_{j=1}^N I_{\Omega_k}(x_j)$ – функция выборочных значений x_j случайной величины x в серии из N испытаний.

Тогда при $N \rightarrow \infty$ распределение вероятностей суммы

$$w_N(K) = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - Np_k)^2}{N p_k} \quad (4)$$

сходится к распределению χ_{K-1}^2 с $K - 1$ степенями свободы:

$$P\{w_N(K) \in B\} \rightarrow \int_B p_{K-1}(x) dx, \quad p_n(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}.$$

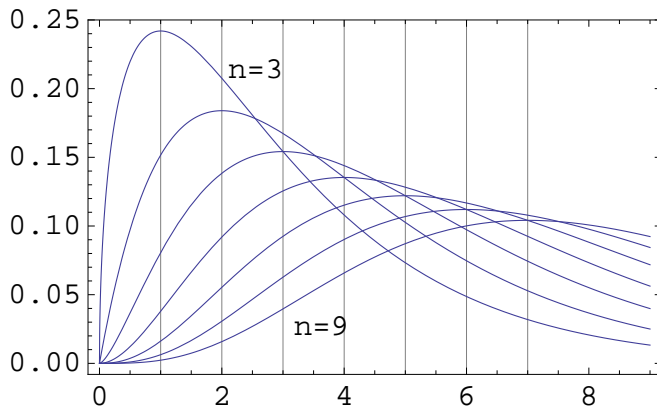


Рис. 1: Плотность $p_{\chi_n^2}(x) = \frac{2^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ распределения χ_n^2 , $n = 3, \dots, 9$, $x_n^* = n - 2$ - точки максимума.

Доказательство. В случае $K = 2$ это утверждение легко проверить. Действительно, если $p_1 + p_2 = 1$ и $n_1 + n_2 = N$, то из равенства $n_1 - Np_1 = Np_2 - n_2$ следует, что

$$\omega_N(2) = \frac{(n_1 - Np_1)^2}{Np_1} + \frac{(n_2 - Np_2)^2}{N(1 - p_1)} = \frac{(n_1 - Np_1)^2}{N\sigma^2}, \quad \sigma^2 = p_1(1 - p_1).$$

Согласно доказанной ранее теореме Муавра–Лапласа для $p_k = P(x \in \Omega_k)$, $n_k = \sum_{j=1}^N I_{\Omega_k}(x_j)$, $\Omega = \bigsqcup_{k=1}^K \Omega_k$ при $K = 2$, $N \rightarrow \infty$ имеет место сходимость по распределению

$$z_N = \frac{n_1 - Np_1}{\sqrt{N\sigma^2}} \rightarrow \xi \in \mathcal{N}(0, 1), \quad p_2 = 1 - p_1.$$

Распределение χ_n^2 совпадает с гамма-распределением $\Gamma\left(\frac{n}{2}, 2\right)$. Поэтому $\omega_N(2) = z_N^2 \rightarrow \xi^2$ имеет распределение $\Gamma\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Докажем теорему Пирсона. Пусть $x \in \Omega$ – случайная величина,

$$z = z(x) = \left\{ \frac{I_{\Omega_k}(x) - p_k}{\sqrt{p_k}} \right\}_{k=1}^K \in \mathbb{R}^K.$$

Положим $e_p \stackrel{\text{def}}{=} \{\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_K}\}$, $\|e_p\|^2 = 1$ и заметим, что

$$(e_p, z(x)) = \sum_{k=1}^K z_k \sqrt{p_k} = \sum_{k=1}^K \frac{I_{\Omega_k}(x) - p_k}{\sqrt{p_k}} \sqrt{p_k} = 0, \quad (5)$$

так как $\sum_{k=1}^K I_{\Omega_k}(x) = I_{\Omega}(x) = \sum_{k=1}^K p_k = 1$. Поэтому векторы $z(x)$ и e_p ортогональны и $\mathbb{E} z(x) = 0$, ибо $\mathbb{E} I_{\Omega_k}(x) = p_k$. Множества Ω_k, Ω_j не пересекаются, поэтому $x \in \Omega_k \cap \Omega_j$ только если $k = j$.

Следовательно, $R = \mathbb{E} z(x) \otimes z(x) =$

$$= \left(\mathbb{E} \frac{I_{\Omega_k}(x)}{\sqrt{p_k}} \frac{I_{\Omega_j}(x)}{\sqrt{p_j}} - 2 \mathbb{E} \frac{\sqrt{p_j} I_{\Omega_k}(x)}{\sqrt{p_k}} + \sqrt{p_k} \sqrt{p_j} \right) = I - e_p \otimes e_p, \quad (6)$$

так как $\mathbb{E} I_{\Omega_k}(x) = p_k$ и $\mathbb{E} I_{\Omega_k}(x) I_{\Omega_j}(x) = p_k \delta_{kj}$.

$R = \mathbb{E} z(x) \otimes z(x) = I - e_p \otimes e_p$ является проектором на подпространство векторов, ортогональных e_p : $R^2 = R$, $Re_p = 0$ и $Rx = x$, если $(x, e_p) = 0$, причем $\text{rank } R = K - 1$ и $\det R = 0$. Преобразуем $z(x)$ с помощью ортогонального преобразования C так, чтобы последняя (K -я) компонента вектора $w(x) \stackrel{\text{def}}{=} Cz(x)$ обращалась в нуль. В силу (5), можно взять любую ортогональную матрицу $C = \{C_1, \dots, C_K\}$, последняя строка которой равна $C_K = e_p \in \mathbb{R}^K$: в силу ортонормированности строк матрицы C имеем $Ce_p = (0, 0, \dots, 1)^T$ и поэтому $(Ce_p, h) = h_K$ для любого $h = \{h_1, \dots, h_K\} \in \mathbb{R}^K$.

Покажем, что независимо от выбора C , ковариационная матрица R_w имеет блочный вид:

$$R_w = \begin{pmatrix} I_{K-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I_{K-1} – единичная $(K-1) \times (K-1)$ матрица.

Действительно, из (6) имеем:

$$\begin{aligned} (h, R_w g) &= (h, \mathbb{E} w \otimes w g) = \mathbb{E} (w, h) (w, g) = \mathbb{E} (h, Cz) (Cz, g) = \\ &= \mathbb{E} (C^T h, z) (z, C^T g) = \mathbb{E} (C^T h, z \otimes z C^T g) = \\ &= (C^T h, \mathbb{E} z \otimes z C^T g) = (C^T h, (I - e_p \otimes e_p) C^T g) = \\ &= (h, C C^T g) - (h, C e_p) (C e_p, g) = (h, g) - h_K g_K, \end{aligned}$$

то есть ковариационная матрица первых $K-1$ компонент вектора $w = Cz \in \mathbb{R}^{K-1}$ равна *единичной* матрице I_{K-1} .

Векторы $z(x)$ и $w(x) = Cz(x)$ отличаются ортогональным преобразованием, т.е. поворотом, поэтому вероятность попадания в шаровой слой не зависит от его вращений:

$$P\{x : z(x) \in S_r\} = P\{x : w(x) \in S_r\}, \quad w(x) \in \mathbb{R}^{K-1}.$$

Для независимых выборочных значений $X_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ компоненты векторов

$$Z_N = \{z(x_1), \dots, z(x_N)\}, \quad W_N = \{w(x_1), \dots, w(x_N)\} = CZ_N$$

независимы и поэтому имеет место аналогичное равенство:

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n z(x_n) \in S_r\right\} &= P\left\{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n w(x_n) \in S_r\right\} \\ &= P\left\{\sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N w_k(x_n)\right)^2 \leq r^2\right\}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 5 для векторов $\tilde{w} = \{w_1, \dots, w_{K-1}\} \in \mathbb{R}^{K-1}$ с *единичной* ковариационной матрицей существует предел:

$$\lim_N \mathbb{E} f(\sqrt{N} \langle \tilde{w} \rangle_N) = \frac{1}{(2\pi)^{(K-1)/2}} \int_{\mathbb{R}^{K-1}} f(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx, \quad (7)$$

где $\langle \tilde{w} \rangle_N = N^{-1} \sum_{n=1}^N \tilde{w}(x_n)$. Поскольку предельная вероятностная мера имеет равномерно ограниченную плотность, то предельный переход распространяется на ограниченные измеримые функции. В частности, ниже мы рассмотрим такой предел для семейства индикаторных функций $f(x) = I_{[0, \rho]}(\|x\|^2)$.

В силу ортогональности матрицы C и определения вектора z ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{K-1} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N \tilde{w}_k(x_n) \right|^2 &= \sum_{k=1}^{K-1} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \tilde{w}_k(x_n) \right|^2 = \sum_{k=1}^K \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N z_k(x_n) \right|^2 \\ &= \|\sqrt{N} \langle z \rangle_N\|_{\mathbb{R}^K}^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k}, \end{aligned}$$

где в правой части та же случайная величина, что и в теореме Пирсона (см. формулу (4)), а левая сходится к случайной величине с распределением χ_{K-1}^2 .

Переходя к сферическим координатам в (7) и заменяя произвольную функцию f на индикаторную, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\sum_{k=1}^K \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k} \leq \rho\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} I_{[0, \rho)} \sum_{k=1}^{K-1} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \tilde{w}_k(x_n) \right|^2 = \\ &= \frac{S_{K-1}}{(2\pi)^{(K-1)/2}} \int_0^\infty I_{[0, \rho)}(r^2) r^{K-2} e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \\ &= \int_0^r \frac{\rho^{\frac{K-1}{2}-1} e^{-\frac{\rho}{2}}}{2^{\frac{K-1}{2}} \Gamma\left(\frac{K-1}{2}\right)} d\rho = P(\chi_{K-1}^2 \leq r), \end{aligned}$$

где сделана замена переменной $\rho = r^2$, $S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ – площадь единичной сферы в \mathbb{R}^n , а случайная величина χ_{K-1}^2 имеет известное распределение. □

Рассмотрим применение критерия Пирсона χ^2 для тестирования псевдослучайных чисел. Получив $N = 32\,000$ псевдослучайных чисел $\{x_n\}_{n=1}^{32\,000}$, $x_n \in [0, 1] = \Omega$, разобьем область значений Ω на $K = 10$, $K = 40$, $K = 100$ непересекающихся отрезков Ω_k , $k \in 1, \dots, K$ сетками с шагом $h = 0.1, 0.025, 0.01$. Для этих сеток строятся гистограммы H_K распределения псевдослучайных чисел:

$$H_{10} = \{3208, 3228, 3158, 3151, 3199, 3175, 3175, 3233, 3165, 3308\},$$

$$H_{40} = \{786, 800, 803, 819, 844, 811, 824, 749, 757, 774, \\ 845, 782, 801, 793, 798, 759, 735, 823, 858, 783, \\ 764, 820, 810, 781, 794, 783, 791, 807, 813, 823, \\ 813, 784, 795, 842, 746, 782, 851, 824, 799, 834\}.$$

Таблицу выборочных значений H_{100} мы опускаем, ее гистограмма изображена ниже рис. 2

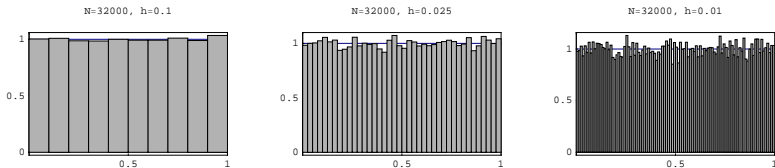


Рис. 2: Гистограммы выборочного распределения $N = 32\,000$ псевдослучайных точек равномерного распределения. Шаг сетки гистограмм равен $h = 0.1, 0.025, 0.01$. С уменьшением шага сетки флуктуации выборочного распределения усиливаются

Далее для $p_k = 0.1$, $p_k = 0.025$, $p_k = 0.01$ вычисляются выборочные значения критерия Пирсона:

$$w_N(K) = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - p_k N)^2}{N p_k},$$

$$w_N(10) = 6.32, \quad w_N(40) = 42.39, \quad w_N(100) = 110.69.$$

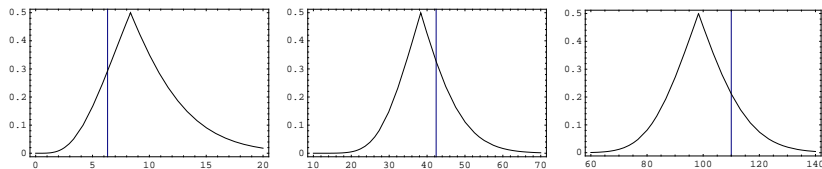


Рис. 3: Графики изображают $\min\{P(\chi_{K-1}^2 \geq x), P(\chi_{K-1}^2 \leq x)\}$, $K = 10$, $K = 40$, $K = 100$. Медианы (8.343, 38.335, 98.334) соответствуют аргументам максимума “двустороннего” распределения χ_K^2 , а выборочные значения $w_N(K)$ изображены вертикальными линиями

Вероятности $w_N(K)$ попасть в хвост распределения χ^2 правее выборочного значения ξ_K^2 равны

$$P(\chi_9^2 \geq 6.3) \approx 0.7, \quad P(\chi_{39}^2 \geq 42.4) \approx 0.32, \quad P(\chi_{99}^2 \geq 110.7) \approx 0.2,$$

что позволяет принять гипотезу о равномерности.

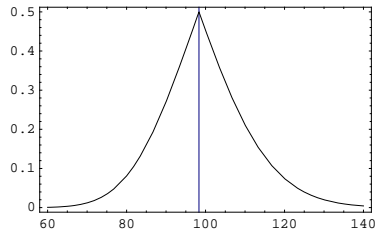
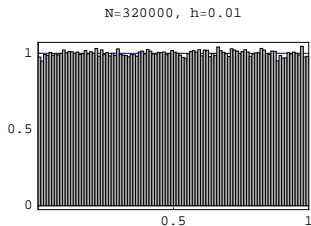


Рис. 4: Нормированная сумма квадратов отклонений от среднего 99.842 мало отличается от положения медианы 98.334

Гипотеза о независимости выборок

Распределение χ^2 может быть использовано для проверки гипотезы о статистической независимости. Пусть $(X, Y) = \{(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)\}$ – таблица результатов N наблюдений пар признаков. Ниже мы рассмотрим разность между экспериментальными и теоретическими данными о зависимости скорости разбегания галактик от расстояния до них, вычисленными по закону Хаббла о линейной зависимости скорости y_n от расстояния x_n . Возникает вопрос: можно ли считать погрешность линейной модели независимой от теоретических значений расстояния x_n или скорости y_n разбегания?

В более общей постановке выборка Ω , состоящая из N наблюдений, разбита двумя способами, соответствующими классификации результатов наблюдений по двум признакам: n_{km} – число наблюдений, попавших в k -ю группу по первому признаку и в m -ю группу по второму признаку:

$$n_{km} = \sum_n I_{\Omega_k^X}(x_n) I_{\Omega_m^Y}(y_n),$$
$$\sum_k n_{km} = N_m^Y, \quad \sum_m n_{km} = N_k^X,$$

где $1 \leq k \leq K$, $1 \leq m \leq M$.

Будем называть n_{km} числами заполнения областей $\Omega_k^X \times \Omega_m^Y$, образующих непересекающееся разбиение множества всех исходов $\Omega = \bigsqcup_{k,m} \Omega_k^X \times \Omega_m^Y$ (см. таблицу 1). Суммы N_k^X и N_m^Y не могут принимать произвольных значений, они удовлетворяют двум условиям:

$$\sum_m N_m^Y = \sum_k N_k^X = N.$$

Таблица 1:

	Ω_1^X	...	Ω_K^X	\sum_k
Ω_1^Y	n_{11}	...	n_{1K}	N_1^Y
...
Ω_M^Y	n_{M1}	...	n_{MK}	N_M^Y
\sum_m	N_1^X	...	N_K^X	

Поэтому векторы с компонентами $\{N_1^X, \dots, N_K^X, N_1^Y, \dots, N_M^Y\}$ принадлежат некоторому $(K + M - 2)$ -мерному подмножеству в \mathbb{R}_+^{K+M} , а числа заполнения n_{km} , при фиксированных N , N_k^X и N_m^Y , удовлетворяют следующим условиям:

$$(i) \sum_{k,m} n_{km} = N, \quad (ii) \sum_{k=1}^K n_{km} = N_m^Y, \quad (iii) \sum_{m=1}^M n_{km} = N_k^X,$$

при $1 \leq m \leq M - 1, \quad 1 \leq k \leq K - 1,$

так как $N_M^Y = N - \sum_{m=1}^{M-1} N_m^Y$ и $N_K^X = N - \sum_{k=1}^{K-1} N_k^X$. Число линейно независимых условий равно $(K - 1) + (M - 1) + 1 = K + M - 1$ и поэтому точки с координатами $\{n_{11}, \dots, n_{KM}\}$ в \mathbb{R}_+^{KM} лежат в линейном подпространстве размерности $KM - (K + M - 1) = (K - 1)(M - 1)$.

Если верна гипотеза о независимости признаков

$$p_{km} = P\{x \in \Omega_k^X, y \in \Omega_m^Y\} \stackrel{?}{=} P\{x \in \Omega_k^X\} P\{y \in \Omega_m^Y\} = p_k^X p_m^Y$$

и $N_k^X/N \rightarrow p_k^X$, $N_m^Y/N \rightarrow p_m^Y$, где p_k^X, p_m^Y - неслучайные вероятности независимых событий, то из теоремы Пирсона вытекает весьма общий критерий независимости признаков.

Теорема 2

Если верна гипотеза о независимости случайных величин X и Y и $p_k^X \approx N_k^X/N$, $p_m^Y \approx N_m^Y/N$, то распределение сумм

$$S_{K,M} = \sum_{k,m} \frac{(n_{km} - N_k^X N_m^Y / N)^2}{N_k^X N_m^Y / N} \approx N \sum_{k,m} \frac{(p_{km}^{(N)} - p_k^{(X)} p_m^{(Y)})^2}{p_k^{(X)} p_m^{(Y)}} \quad (8)$$

сходится при $N \rightarrow \infty$ к распределению $\chi_{(K-1)(M-1)}^2$.

Закон Хаббла

При наличии нескольких признаков теорема 2 может быть использована для анализа зависимости любой пары признаков. Рассмотрим вопрос о независимости погрешности линейной аппроксимации и скорости разбегания 34-х галактик. Справа – погрешность линейной аппроксимации как функция скорости разбегания. Для этой цели области изменения расстояний и скоростей разбиты на 7 частей (всего 49 областей), для которых вычислены числа заполнения, приведенные в таблице 2. Строки этой таблицы, обозначенные буквам латинского алфавита, соответствуют семи отрезкам вдоль оси X , а столбцы, пронумерованные римскими цифрами, соответствуют семи отрезкам вдоль оси Y на правом рис. 5

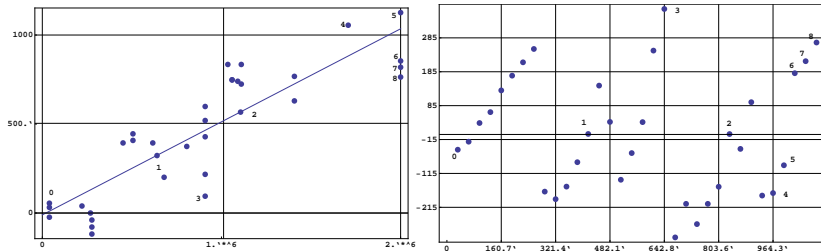


Рис. 5: Экспериментальные данные о зависимости скорости разбегания галактик (км/с) от расстояния (парсек) и теоретическая прямая, а также разброс ошибок для данной теоретической модели . Справа по оси x отложена скорость разбегания, а по оси y –погрешность линейной аппроксимации

Таблица 2:

n_{km}	I	II	III	IV	V	VI	VII	N_x
a	0	0	2	2	0	0	0	4
b	0	1	0	0	2	2	0	5
c	0	2	1	1	1	0	0	5
d	0	1	1	2	0	1	0	5
e	2	2	0	0	0	0	1	5
f	0	2	1	1	1	0	0	5
g	0	1	1	0	1	2	0	5
N_y	2	9	6	6	5	5	1	34

В рассматриваемом примере $N = 34$, $K = M = 7$, число степеней свободы равно $(K - 1)(M - 1) = 36$,

$$S_{K,M}^* = \sum_{k,m} \frac{(n_{km} - N_k^X N_m^Y / N)^2}{N_k^X N_m^Y / N} = 42.16.$$

В этом случае медиана распределения χ_{36}^2 имеет значение 35.34 и лежит левее точки $S_{K,M}^*$. Учитывая, что

$$P_{\chi_{36}^2}(S_{K,M} \leq 42.16) = \int_0^{42.16} p_{\chi_{36}^2}(x) dx \approx 0.778,$$

можно сделать вывод: вероятность получить меньшие значения суммы (8) при условии, что гипотеза о независимости верна, не превосходит 0.78, что позволяет принять гипотезу о независимости, хотя этот результат означает, что в 4 случаях из 5 значение $S_{K,M}$ должно принимать меньшие значения.

Этот пример является иллюстрацией того факта, что открытие новых законов природы обычно достигается на пределе чувствительности экспериментального оборудования.

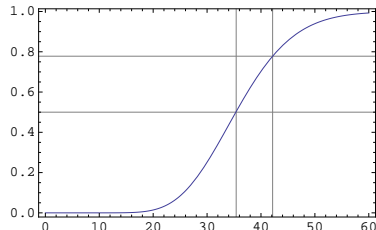
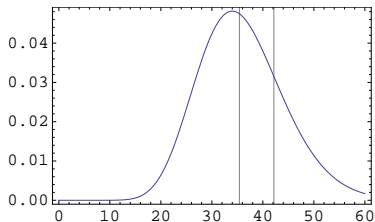


Рис. 6: Положение выборочной оценки критерия Пирсона и медианы на графиках плотности и кумулятивной вероятности распределения χ^2_{36} .