Теория вероятностей и математическая статистика

11 мая 2011 г.

Содержание

Содержание

Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс является случайным блужданием со случайным временем τ ожидания перехода в новое состояние не зависящим от прошлого. Вероятность отсутствия переходов в течении времени t равна

$$P_0\{\tau \geq t\} = 1 - \kappa t + O(t^2) = (1 - \kappa t/n + O(t/n)^2)^n \quad \forall n \geq 1.$$

Последнее равенство является следствием марковского свойства и правила вычисления совместной вероятности независимых событий . Поэтому

$$P_0\{\tau \geq t\} = \lim_n (1 - \kappa t/n + O(t/n)^2)^n = e^{-\kappa t}.$$

Для пуассоновского процесса предполагается, что вероятность двух и более переходов за время t равна $P_2\{\tau \geq t\} = O(t^2)$, поэтому

$$P_1\{\tau \geq t\} = \kappa t + O(t^2).$$

Отсюда следует уравнение для вероятности n переходов за время t, решение которого можно найти по индукции:

$$P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(s) P_1(ds) P_0(t-s) = \kappa \int_0^t P_{n-1}(s) e^{-\kappa(t-s)} ds, \qquad (1)$$

$$P_n(t) = \frac{(\kappa t)^n}{n!} e^{-\kappa t}$$

Рассмотрим *однородный марковский скачкообразный процесс* $p_\tau : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, совершающий скачки, распределение которых не зависит от того, из какой точки они происходят:

$$P\{p_\tau - p_{\tau-0} \in B\} = m(B), \tag{2}$$

где m – вероятностная мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Если не сказано противное, считается, что процесс начинается в точке $p_0 = 0$.

Обозначим через p_t случайную траекторию марковского процесса, совершающего скачки с распределением m и интенсивностью κ, и пусть $I_\Gamma(x)$ – характеристическая функция множества $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$.

Переходная вероятность перехода из точки p за время t на множество Γ по определению равна вероятностной мере всех траекторий, удовлетворяющих этому условию. Таким образом,

$$P(p,t|\Gamma) = \mathbb{E}\, I_\Gamma(p + p_t).$$

Используя марковское свойство и независимость величины скачков от их числа и моментов времени, в которые они происходят, можно написать разложение переходной вероятности в сумму вкладов от несовместных событий, выделив три подмножества траекторий с числом скачков за время Δt равным 0, 1, два или более:

$$
\begin{aligned}
P(p+\Delta t, t|\Gamma) &= \mathbb{E}\, I_\Gamma(p + p_{t+\Delta t}) = \\
&= (1-\kappa\Delta t)\mathbb{E}\, I_\Gamma(p+p_t) + \kappa\Delta t \int m(dq)\mathbb{E}\, I_\Gamma(p_t + p + q) + o(\Delta t) = \\
&= (1-\kappa\Delta t)P(p,t|\Gamma) + \kappa\Delta t \int m(dq) P(p+q,t|\Gamma) + o(\Delta t) = \\
&= P(p,t|\Gamma) + \kappa\Delta t \int m(dq)(P(p+q,t|\Gamma) - P(p,t|\Gamma)) + o(\Delta t),
\end{aligned}
$$

так как $\int_{\mathbb{R}^n} m(dq) = 1$.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем уравнение *Колмогорова–Феллера* для $P(p, t|\Gamma)$ и интегралов вида

$$f(p,t) = \int P(p,t|dg)f(g) = \mathbb{E}\, f(p+p_t)$$

с ограниченной измеримой функцией $f(p)$. В этом случае

$$\frac{d}{dt}f(p,t) = \kappa \int m(dq)(f(p+q,t) - f(p,t)), \quad f(p,t)|_{t=0} = f(p). \quad (3)$$

Данное уравнение имеет эквивалентную интегральную форму:

$$\begin{aligned} f(p,t) &= e^{-\kappa(t-s)}f(p,s) + \kappa \int_s^t dt_1 e^{-\kappa(t-t_1)} \int m(dq) f(p+q,t_1) \\ &= e^{-\kappa t}f(p) + \kappa \int_0^t dt_1 e^{-\kappa(t-t_1)} \int m(dq) f(p+q,t_1), \qquad (4) \end{aligned}$$

где первое слагаемое учитывает вклад траекторий, не совершающих скачков, а интегральный член описывает вклад от траекторий, не совершающих скачков на интервалах $(t_1, t]$. Интегральное уравнение (4) эквивалентно уравнению Колмогорова–Феллера (3).

Интегральная форма допускает построение решения в виде ряда (ряда Дайсона)

$$\begin{aligned} f(p,t) = \ & e^{-\kappa t} f(p) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \int_0^t e^{-\kappa(t-t_1)} dt_1 \ldots \int_0^{t_{n-1}} e^{-\kappa t_n} dt_n \\ & \times \int m(dq_1) \ldots \int m(dq_n) f(p+Q_n) \\ = & e^{-\kappa t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa t)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^n} m(dq_1) \ldots \int_{\mathbb{R}^n} m(dq_n) f(p+Q_n) \\ = & \mathbb{E} f(p+p_t), \end{aligned} \tag{5}$$

где p_t –случайная траектория пуассоновского процесса, $Q_0 = 0$, $Q_n = q_1 + \cdots + q_n$, а n-й член суммы описывает вклад в математическое ожидание от траекторий, совершающих ровно n скачков. Уравнение (3) для этой функции проверяется дифференцированием по t.

Замечание 1

Формулы (5) *показывают, что вероятность совершить за время* t *скачки* $q_k \in B_k$ *в моменты* $t_k \in T_k$, $\max_{T_k} t < \min_{T_{k+1}} t$, *равна*

$$P_t(T_1, B_1, \ldots, T_n, B_n | n) = \kappa^n e^{-\kappa t} \prod_{k=1}^{n} \mathrm{mes}\, T_k\, m(B_k),$$

т. е. если фиксирован конечный момент t *и число скачков* n, *то моменты* $\{t_k\}$ *равномерно распределены на* $T_k \subset [0, t]$.

Замечание 2

Моделирование траекторий процесса p_t *состоит из 4-х операций:*
(1) генерируется случайное число скачков n *за время* t *с пуассоновским распределением;*
(2) генерируются и упорядочиваются n *моментов скачков* $\{t_k\}$, *равномерно распределенные на* $[0, t]$;
(3) генерируется n *случайных величин* $\{q_k\}$ *с распределением* $m(dq)$;
(4) строится траектория $p_s = \sum_{k:\, t_k < s} q_k$.

Уравнение Колмогорова–Феллера

В случае, если интенсивность скачков является функцией координат и времени, а переходная вероятность скачков зависит от величины скачка и точки, из которой он происходит, уравнения (3) и (4) имеют две формы сопряженные относительно двойственности между $L_1(X,dx)$ и $L_\infty(X,dx)$: прямое уравнение Колмогорова–Феллера для плотности вероятности $p(x,t)$ в момент t, $p(x,t) \in L_1(X,dx)$, и обратное уравнение Колмогорова–Феллера для переходной вероятности $P(B,t|x)$, $P(B,t|x)|_{t=0} = I_B(x)$, из точки x на множество B за время t, $P(B,t|x) \in L_\infty(X,dx)$. Эквивалентные уравнения для переходных вероятностей имеют вид

$$\frac{d}{dt}P(B,t|x) = \kappa(x,t)\int m(dq,t)\big(P(B,t|x+q) - P(B,t|x)\big), \tag{6}$$

$$P(B,t|x) = e^{-\int_0^t \kappa(x,s)\,ds} I_B(x) + \int_0^t ds\,\kappa(x,s)e^{-\int_s^t \kappa(x,\tau)\,d\tau}\int_X m(dq,s)\,P(B,t|x+q).$$

Уравнение для плотности вероятности вытекают из формулы двойственности $\big(LP(B,t|\cdot), p(\cdot,t)\big) = \big(P(B,t|\cdot), L^* p(\cdot,t)\big)$:

$$\frac{d}{dt}p(x,t) = \int p(x-q,t)\kappa(x-q,t)m(dq,t) - \kappa(x,t)p(x,t), \tag{7}$$

$$p(x,t) = e^{-\int_0^t \kappa(x,s)\,ds} p_0(x) + \int_0^t ds \int_X p(x-q,s)\,\kappa(x-q,s) e^{-\int_s^t \kappa(x,\tau)\,d\tau} m(dq,s).$$

Из дифференциальной формы уравнений очевидно сохранение вероятностной нормировки решений, а из интегральной – сохранение неотрицательности начального условия.
Уравнения Колмогорова–Феллера имеют мнинмальные решения, определяемые как наименьшая верхняя грань последовательностей

$$\frac{d}{dt}P_n(B,t|x) = \kappa(x,t)\int m(dq,t)\big(P_{n-1}(B,t|x+q) - P_n(B,t|x)\big).$$

Если минимальное решение сохрахняет единицу, то оно единственно в классе таких функций.

Диффузионный предел случайных блужданий

Рассмотрим моменты $\mu_m = \mathbb{E}\, p_t^m$ распределения смещений p_t случайного блуждания с шагом h за время t. Нечетные моменты равны нулю, а четные могут быть записаны в виде ряда:

$$\mathbb{E}\, p_t^{2m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa t)^n}{n!} e^{-\kappa t} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{2m}}{2^n} C_n^k (n-2k)^{2m}.$$

Сумма по n усредняет по числу скачков за время t, а сумма по k –по смещениям $(n-2k)h$ случайного блуждания. Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (n-2k)^{2m} \equiv \left(x\frac{d}{dx}\right)^{2m} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-2m}\Big|_{x=1} =$$

$$= \left(x\frac{d}{dx}\right)^{2m} x^n (1+x^{-2m})^n\Big|_{x=1} =$$

$$= \left(x\frac{d}{dx}\right)^{2m} (x+x^{-1})^n\Big|_{x=1} = \left(\frac{d}{dy}\right)^{2m} (e^y+e^{-y})^n\Big|_{y=0}.$$

Для $y = \ln x$ получаем тождество

$$\mathbb{E}\, p_t^{2m} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa t)^n}{n!} e^{-\kappa t} \frac{h^{2m}}{2^n} \left(\frac{d}{dy}\right)^{2m} (e^y + e^{-y})^n \Big|_{y=0} =$$

$$= \left(h\frac{d}{dy}\right)^{2m} e^{(\cosh y - 1)\kappa t} \Big|_{y=0}$$

используя которое можно вычислить предельные значения четных моментов в предположении $\kappa \to \infty$, $h \to 0$, $\kappa h^2 \to \sigma^2$:

$$\mu_2 = \mathbb{E}\, p_t^2 = \kappa h^2 t \to \sigma^2 t,$$

$$\mu_4 = \mathbb{E}\, p_t^4 = h^4(\kappa t + 3(\kappa t)^2) \to 3!!(\sigma^2 t)^2,$$

$$\mu_6 = \mathbb{E}\, p_t^6 = h^6(\kappa t + 15(\kappa t)^2 + 15(\kappa t)^3) \to 5!!(\sigma^2 t)^3,$$

$$\mu_8 = \mathbb{E}\, p_t^8 = h^8(\kappa t + \cdots + 105(\kappa t)^4) \to 7!!(\sigma^2 t)^4,$$

$$\boxed{\mu_{2n} = \mathbb{E}\, p_t^{2n} \to (2n-1)!!(\sigma^2 t)^n} \qquad (8)$$

где $(2n-1)!! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)$.

Из формулы Стирлинга следует, что $\mu_{2n} = O\left(\frac{2n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ при больших n. Поэтому моменты (8) удовлетворяют условию Карлемана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = O\left(\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \infty$$

и однозначно определяют распределение смещения p_t. Известно, что такие же моменты имеет случайная величина w_t с распределением равным функции Грина уравнения диффузии

$$G_\sigma(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2 t}}, \quad \frac{\partial G_\sigma}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G_\sigma}{\partial x^2}, \quad G_\sigma(x,y,0) = \delta(x-y),$$

$$\mathbb{E}\, w_t^{2m} = \int G_\sigma(x,y,t)(x-y)^{2m} dy = (2n-1)!!(\sigma^2 t)^n.$$

В силу теоремы о достаточном условии равенства характеристических функций, из условия Карлемана для предельного распределения случайных блужданий следует совпадение распределений предела случайных блужданий $p_t = p_t(h,\kappa)$ при $h^2\kappa \to \sigma^2$, $h \downarrow 0$ и диффузионного процесса w_t.

Марковский процесс w_t, заданный с помощью функции Грина G_σ, называется *диффузионным процессом*:

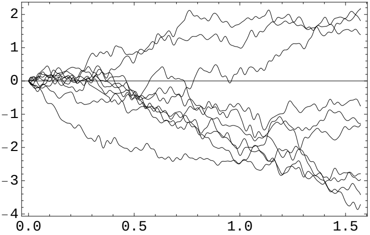
$$P(w_{t+s} \in B | w_s = y) = \int_B G_\sigma(x, y, t)\, dx.$$

Поскольку плотность предельного распределения непрерывна, из теоремы Бохнера–Хинчина следует слабая сходимость переходных вероятностей пуассоновского процесса $p_t(\kappa, h)$ к переходным вероятностям диффузионного процесса w_t. Более глубоким фактом является то, что мера Винера на σ-алгебре непрерывных траекторий определяется переходными вероятностями винеровского процесса (*Ито К., Маккин Г.*, Диффузионные процессы и их траектории. М.: Мир, 1968, гл. I, § 1.4.).

Теорема 1

Пусть $\{nh\}_{n=-\infty}^{\infty}$ – множество значений случайного блуждания $p_t(\kappa, h)$ и $P_t(kh, nh)$ – его вероятностное распределение. Тогда для любой ограниченной непрерывной функции f существует предел

$$\lim_{\kappa\uparrow\infty,\, h\downarrow 0,\, kh\to x,\, \kappa h^2\to\sigma^2} \sum_n P_t(kh, nh) f(nh) = \int G_\sigma(x, y, t)\, f(y)\, dy.$$



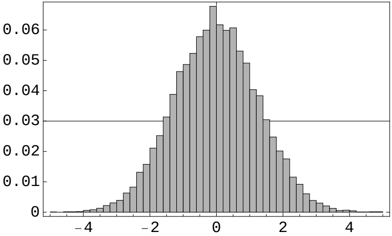


Рис. 1: Траектории стандартного винеровского процесса w_t, полученные суммированием 200 членов случайного ряда Фурье, и гистограмма распределения $w_{\pi/2}$, построенная по 20 000 выборочных траекторий

Замечание 3

Если случайные блуждания не симметричны так, что $p_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{a}{\sigma^2} h$, *то при* $\kappa \uparrow \infty$, $h \downarrow 0$, $kh \to x$, $\kappa h^2 \to \sigma^2$, *предельный процесс является диффузией со сносом, скорость которого равна* a:

$$\frac{\partial G_{\sigma,a}}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 G_{\sigma}, a}{\partial x^2} + a \frac{\partial G_{\sigma}, a}{\partial x}.$$

Свойства траекторий винеровского процесса

Рассмотрим стохастическую реализацию диффузии w_t и формулу Андрэ для вероятности достижения заданного уровня траекториями случайного процесса.
Пусть $g_n \in \mathcal{N}(0,1)$ и w_t –случайный процесс на отрезке $t \in [0,\pi]$

$$w_t \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{\sigma^2 t^2}{\pi}}\, g_0 + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}\, g_n. \tag{9}$$

Теорема 2

Процесс w_t на отрезке $[0,\pi]$ имеет независимые приращения, причем $\mathbb{E} w_t = 0$, $\mathbb{E} w_t^2 = \sigma^2 t$, $\mathbb{E}\, e^{izw_t} = e^{-\frac{\sigma^2 p^2 t}{2}}$.

Доказательство. Доказательство использует разложение Фурье, аналитическую проверку которого мы оставляем читателю:

$$\pi \min\{t, s\} - ts = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt \sin ns}{n^2}, \qquad s, t \in [0, \pi]. \tag{10}$$

Очевидно, что $\mathbb{E}\, w_t = 0$. Заметим, что $\mathbb{E}\, g_n\, g_m = \sigma^2 \delta_{m,n}$, и напомним, что независимость нормально распределенных случайных величин следует из их некоррелированности. Пусть $a \le b \le s \le t$. Независимость приращений следует из равенства (10) и формулы для корреляционной функции процесса w_t:

$$\frac{\pi}{\sigma^2}\mathbb{E}\,(w_t - w_s)(w_b - w_a) =$$
$$= (t-s)(b-a) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin nt - \sin ns)(\sin nb - \sin na)}{n^2} =$$
$$= (t-s)(b-a) + \pi(\min\{t,b\} - \min\{t,a\} + \min\{s,a\} - \min\{s,b\}) +$$
$$+ ta - sa + sb - tb = (t-s)(b-a) + \pi(b - a + a - b) +$$
$$+ ta - sa + sb - tb = 0.$$

Если $t = b$, $a = s = 0$, то аналогичные вычисления показывают, что

$$\frac{\pi}{\sigma^2}\mathbb{E}\, w_t^2 = t^2 + \pi t - t^2 = \pi t,$$

то есть дисперсия w_t равна $\mathbb{E}\, w_t^2 = \sigma^2 t$.
Вычислим характеристическую функцию д. с. в. w_t используя равенство $2\sum_n \frac{\sin^2 nt}{n^2} = t(\pi - t)$, являющееся частным случаем (10):

$$\mathbb{E}\, e^{izw_t} = \int \dots \int \prod_{n=0}^{\infty} \frac{dg_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{g_n^2}{2}} e^{\frac{iz\sigma}{\sqrt{\pi}}\left(tg_0 + \sqrt{2}\sum_n \frac{\sin nt}{n} g_n\right)} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{\sigma^2 p^2}{2\pi}\left(t^2 + 2\sum_n \frac{\sin^2 nt}{n^2}\right)\right\} = e^{-\frac{\sigma^2 p^2 t}{2}},$$

что совпадает с характеристической функцией найденного выше предельного процесса. Отсюда следует, что марковский случайный процесс (9) при $t \in [0, \pi]$ является диффузионным процессом[1]. $\square$

[1] Стандартную диффузию ($\sigma = 1$) также называют *стандартным броуновским движением* или *стандартным винеровским процессом*.

Из теоремы 2 вытекают следующие свойства винеровского процесса.

Следствие 1

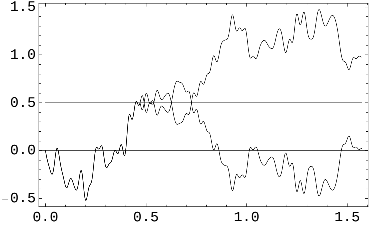
1) Автомодельность: если w_t – стандартный винеровский процесс, то $\tilde{w}_t = cw_{t/c^2}$ также является стандартным винеровским процессом.
2) Автомодельность относительно инверсии времени: если w_t – стандартный винеровский процесс, то $\hat{w}_t = tw_{1/t}$ также является стандартным винеровским процессом.
3) Закон сублинейного роста: $\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} t^{-1} w_t = 0\right) = 1$.

Доказательство. Последнее утверждение следует из второго:

$$\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} t^{-1} w_t = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} w_{1/t} = 0\right) = P(w_{+0} = 0) = 1.$$

Поскольку $\tilde{w}_t$ и $\hat{w}_t = tw_{1/t}$ имеют нормальные распределения при любом $t > 0$, то достаточно убедиться, что их средние равны нулю, приращения независимы, а дисперсии равны t. Эти факты очевидны. Отсюда следуют первое и второе утверждения:
$\mathbb{E}\,\tilde{w}_t = c^2\,\mathbb{E} w_{t/c^2}^2 = t, \quad \mathbb{E}\,\hat{w}_t = t^2\,\mathbb{E} w_{1/t}^2 = t.$ □

Важная для приложений оценка вероятностной меры множества траекторий винеровского процесса, достигающих заданный уровень, может быть получена с помощью принципа отражения Андрэ. Поскольку марковский процесс w_t имеет независимые приращения и начинается заново в каждый момент времени, то вероятностная мера траекторий, симметрично отраженных относительно произвольной линии уровня, совпадает с мерой траекторий, превышающих заданный уровень.



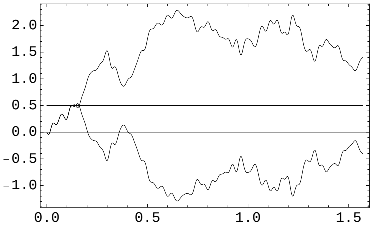


Рис. 2: Траектории винеровского процесса, отраженные относительно уровня 0.5, достигаемого в случайные моменты времени

Поэтому каждой траектории, оканчивающейся в момент t выше заданного уровня, соответствует траектория, отраженная относительно этого уровня:

$$\boxed{P\{\max_{s\in[0,t]} w_s \geq x | w_0 = 0\} = 2\int_x^\infty G_\sigma(y,0,t)\,dy \quad \forall\, x > 0}$$

Следствие 2

Мера траекторий, начинающихся в нуле и не пересекающих этот уровень в течение некоторого конечного времени, равна нулю.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - P\{\max_{s\in[0,t]} w_s \geq x | w_0 = 0\}\right) = 1 - 2\int_0^\infty G_\sigma(y,0,t)\,dy = 0.$$

Формула Фейнмана–Каца

Решение задачи Коши для диффузионного уравнения можно представить в виде математического ожидания по траекториям процесса w_t: функция $f(x,t) = \mathbb{E}\, f_0(w_t + x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f|_{t=0} = f_0(x). \tag{11}$$

Если f_0 – гладкая функция, то этот факт выводится из свойств винеровского процесса $\mathbb{E}(w_{t+dt} - w_t) = 0$, $\mathbb{E}(w_{t+dt} - w_t)^2 = \sigma^2 dt$. Полагая $dw_t \stackrel{\text{def}}{=} w_{t+dt} - w_t$ и используя марковское свойство w_t и свойство его моментов (8), получим

$$\begin{aligned} f(x,t{+}dt) - f(x,t) &= \mathbb{E}\left(f_0(w_{t+dt} + x) - f_0(w_t + x)\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(f_x'(w_t + x)dw_t + \frac{1}{2}f_x''(w_t + x)(dw_t)^2\right) + O(dt^2) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbb{E}\, f_0(w_t + x)dt + O(dt^2). \end{aligned}$$

Отсюда следует уравнение (11). Докажем более общее утверждение, называемое *формулой Фейнмана–Каца*.

Теорема 3

Пусть $w_t = \{w_t^{(1)}, \dots, w_t^{(n)}\} \in \mathbb{R}^n$ *– вектор, компоненты которого являются независимыми винеровскими процессами, и* f_0, V, g *– гладкие функции* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. *Тогда*

$$f(x,t) = \mathbb{E}\Big(f_0(w_t + x) e^{\int_0^t V(w_t - w_s + x)\, ds} + \\ + \int_0^t ds\, g(w_t - w_s + x) e^{\int_s^t V(w_t - w_\tau + x)\, d\tau} \Big) \tag{12}$$

– решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\Delta + V(x) \right) f(x,t) + g(x). \tag{13}$$

Доказательство. Функция (12) удовлетворяет начальному условию $f(x,0)=f_0(x)$, а $f(x,t)=\mathbb{E}\,F(w_t+x,t,w_.)$, где $F(x,t,w_.)$ – функция первых двух переменных и функционал третьей, причем

$$\partial_t F(x,t,w_.)=V(x)F(x,t,w_.)+g(x).$$

Точка $w_.$ указывает на зависимость функционала $F(x,t,w_.)$ от $\{w_\tau\}_{\tau\in[0,t]}$. Поскольку $\mathbb{E}\,(w^{(j)}_{t+\Delta t}-w^{(j)}_t)(w^{(k)}_{t+\Delta t}-w^{(k)}_t)=\sigma^2\delta_{jk}\Delta t$, то

$$f(x,t+\Delta t)-f(x,t)=\mathbb{E}\,\big(F(w_{t+\Delta t}+x,t+\Delta t,w_.)-F(w_t+x,t,w_.)\big)=$$

$$=\mathbb{E}\,\Big(\partial_t F(w_t+x,t,w_.)\Delta t+\sum_{k=1}^n\partial_{x_k}F(w_t+x,t,w_.)(w^{(k)}_{t+\Delta t}-w^{(k)}_t)+$$

$$+\frac12\sum_{j,k=1}^n\partial_{x_j,x_k}F(w_t+x,t,w_.)(w^{(j)}_{t+\Delta t}-w^{(j)}_t)(w^{(k)}_{t+\Delta t}-w^{(k)}_t)+O(\Delta t)^2=$$

$$=\left(\frac{\sigma^2}{2}\sum_{k=1}^n\partial^2_{x_k}+V(x)\right)\mathbb{E}\,F(w_t+x,t,w_.)\Delta t+g(x)\Delta t+O(\Delta t)^2=$$

$$=\left(\frac{\sigma^2}{2}\Delta+V(x)\right)f(x,t)\Delta t+g(x)+O(\Delta t)^2.$$

Отсюда следует уравнение (13).

Замечание 4

Пусть $w_t - w_s + x = \chi_s$, $s \in [0, t]$, χ_s – *винеровский процесс, обращенный по времени начинающийся в точке* x. *Запишем решение* (13) *в эквивалентном виде:*

$$f(x,t) = \mathbb{E}_{x,t}\left(f_0(\chi_0)e^{\int_0^t V(\chi_s)\,ds} + \int_0^t ds\, g(\chi_s)e^{\int_s^t V(\chi_\tau)\,d\tau}\right),$$

где $\mathbb{E}_{x,t}$ *–матожидание по траекториям процесса* χ_s : *таким, что* $\chi_t = x$. *Закон больших чисел и центральная предельная теорема позволяют использовать эту формулу для численного решения задачи* (13) *методом Монте-Карло:*

$$f(x,t) \approx \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(f_0(\chi_0^{(n)})e^{\int_0^t V(\chi_s^{(n)})\,ds} + \int_0^t ds\, g(\chi_s^{(n)})e^{\int_s^t V(\chi_\tau^{(n)})\,d\tau}\right),$$

где $\{\chi_s^{(n)}\}_{n=1}^N$ – *выборочные траектории винеровского процесса.*