# Теория вероятностей и математическая статистика

4 октября 2011 г.

# Содержание

# Марковские цепи

Матрица $P = \{p_{mn}\} \in \mathcal{M}_N$ с неотрицательными коэффициентами $p_{mn} \geq 0$ называется *неотрицательной*[1]. Конечное или бесконечное $N$ описывает число возможных значений случайной величины $\chi \in \{\chi_n\}_{n=1}^N \stackrel{\text{def}}{=} \Omega$. Векторы $\{\pi_n\}$ с неотрицательными компонентами, такие что $\sum_n \pi_n = 1$, задают распределение вероятностей

$$P\{\chi = \chi_n\} = \pi_n, \tag{1}$$

а неотрицательные матрицы $P = \{P_{mn}\}$, такие что $\sum_m P_{mn} = 1$, используются для описания переходов $\pi_{t+1} \stackrel{\text{def}}{=} P\pi_t$. В этом случае последовательность случайных величин $\{\chi_t\}$, $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$ называется *однородной по времени* цепью Маркова, независящие от времени матричные элементы $P_{mn}$ – *вероятностями перехода*, а сама матрица $P$ – *стохастической матрицей*.

[1] Матрица $P \in \mathcal{M}_N$ называется *положительной*, если $p_{mn} > 0$. Напомним, что матрица $A \in \mathcal{M}_N$ *неотрицательно определена*, если $(x, Ax) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Определение цепи Маркова содержит предположение о том, что вероятность перехода из $n$ в состояние $m$ не зависит от предыдущих состояний цепи. Следовательно, вероятность последовательности состояний $\{\chi_{n_1} \to \chi_{n_2} \to \cdots \to \chi_{n_k}\}$ может быть вычислена по формуле произведения вероятностей независимых событий:

$$P\{n_0 \to n_1 \to \cdots \to n_k\} = \left(\prod_{i=1}^{k} p_{n_i, n_{i-1}}\right) \pi_{n_0}, \tag{2}$$

где $\pi_{n_0}$ – заданная в начальный момент вероятность состояния $\chi_{n_0}$, а $\prod_{i=1}^{k} P_{n_i, n_{i-1}}$ – условная вероятность перехода из состояния $\chi_{n_0}$ в $\chi_{n_k}$ за $k$ шагов при условии, что в моменты $1, \ldots, k$ система находилась в состояниях $\chi_{n_1}, \ldots, \chi_{n_{k-1}}$, последовательность которых называется *траекторией* марковской цепи, а величина (2) – *вероятностью* этой траектории.

Следующее естественное обобщение состоит в определении вероятностных мер на неубывающем семействе алгебр траекторий $\Sigma_k$, $k \geq 1$, порождаемых событиями вида

$$\Omega_k(D) = \{\chi_i \in D_i \text{ при } i \leq k, \quad \chi_i \text{ любое при } i > k\}, \; D_i \subset \Omega,$$

$$P(\Omega_k(D)) = \sum_{n_0 \in N_0, \ldots, n_k \in N_k} \left( \prod_{i=1}^{k} p_{n_i, n_{i-1}} \right) \pi_{n_0},$$

где $N_k$ – множество целочисленных индексов, сопоставляемое множеству точек $D_k$ согласно (1). В следующей главе мы рассмотрим задачи, иллюстрирующие возможности теории марковских цепей и обосновывающие предельны переход от случайных блужданий к диффузионным процессам.

# Случайное блуждание

Случайное блуждание является простейшим примером цепи Маркова. Множество значений процесса в одномерном случае —целочисленная решетка, а матрица переходных вероятностей этого процесса двухдиагональна: $P_{i,i\pm1} = \frac{1}{2}$, остальные переходы запрещены. Для этой цепи $P_{i,j} = p_{i-j}$. Такие цепи называются *пространственно однородными*.

Блуждание, начинающееся в некотором узле решетки, может вернуться в исходную точку только через четное число шагов, причем после возвращения блуждание *начинается заново*. Пусть $u_{2n}$ – вероятность вернуться через $2n$ шагов, и пусть $f_{2m}$ – вероятность вернуться в первый раз через $2m$ шагов. Благодаря марковскому свойству блуждания и несовместности различных значений моментов первого возвращения, имеет место тождество

$$u_{2n} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ \sum_{m=1}^{n} f_{2m} u_{2n-2m}, & \text{если } n > 0. \end{cases} \tag{3}$$

Вероятность возвращения через $2n$ шагов выражается явным образом через число траекторий, совершающих $n$ шагов вправо и $n$ шагов влево: их число равно $C_{2n}^{n}$. Доля таких траекторий среди $2^{2n}$ траекторий равна вероятности возвращения:

$$u_{2n} = 2^{-2n} C_{2n}^{n} \approx \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = O(n^{-1/2}). \tag{4}$$

Для того, чтобы вычислить $f_{2n}$ используется дискретный аналог характеристической распределения времени возвращения:

$$U(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} z^n = \frac{1}{\sqrt{1-z}}, \; F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} z^n .$$

Подставляя эти выражения в (3), получим уравнение для $F$:

$$U(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} z^m f_{2m} u_{2n-2m} z^{n-m} =$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} z^m f_{2m} \sum_{n=m}^{\infty} u_{2n-2m} z^{n-m} = 1 + F(z)\, U(z).$$

Выражая $1-\sqrt{1-z}$ через интеграл от $1/\sqrt{1-x}$, находим

$$F(z) = 1 - \frac{1}{U(z)} = 1 - \sqrt{1-z} = \frac{1}{2}\int_0^z \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n z^n}{(2n-1)2^{2n}},$$

следовательно,

$$f_{2n} = \frac{u_{2n-2}}{2n} = \frac{C_{2n}^n}{(2n-1)2^{2n}} \approx \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{(2n-1)2^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}2\pi n} = \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi n(2n-1)^2}} = O(n^{-3/2}). \tag{5}$$

В теории игр этот результат интерпретируется как вероятность оставаться в выигрыше (или проигрыше) в серии из $\tau = 2n$ игр подряд в случае, если возможные исходы игр равновероятны. Для игрока, находящегося в проигрыше, этот результат означает, что, скорее всего, отыграться не удастся, так как среднее время пребывания в этом состоянии бесконечно: $\mathbb{E}\tau = \sum_n 2n f_{2n} = \infty$.

Аналогично вычисляется вероятность $p_{2m,2n}$ положительного выигрыша в $2m$ играх и отрицательного в $2n-2m$ играх в серии из $2n$ игр:

$$p_{2m,2n} = u_{2m}u_{2n-2m} \approx \frac{1}{\pi\sqrt{n(n-m)}} = O(n^{-1/2}). \tag{6}$$

Отсюда выводится закон арксинуса. Его утверждение согласуется с приведенной выше интерпретацией формулы (5) и в таком же смысле довольно неожиданно: вероятность максимального выигрыша или проигрыша ($m \approx 0$ или $m \approx n$) выше, чем вероятность результата близкого к нулевому ($m \approx n/2$)

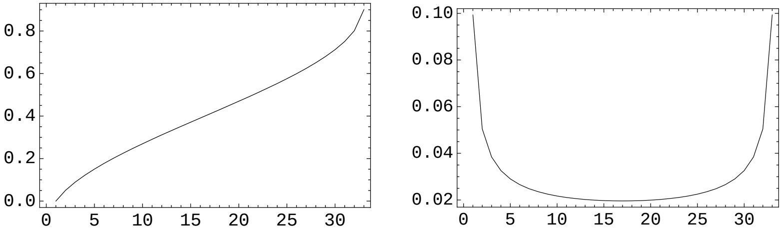


Рис. 1: На левом и правом графиках изображены плотность и кумулятивное распределение времени положительного выигрыша

### Теорема 1

*Для любых конечных $m \le n$ выполнена формула (6). При фиксированном $a \in (0,1)$ и $n \to \infty$ существует предельная вероятность оставаться в положительном выигрыше в течение не более $a \cdot n$ игр равна*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{an} p_{2m,2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\pi} \sum_{m=0}^{an} \frac{1}{\sqrt{\frac{m}{n}(1-\frac{m}{n})}} = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{dx^{1/2}}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\pi} \arcsin a^{1/2}. \tag{7}$$

Это распределение называется *законом арксинуса*.

*Доказательство*. Очевидно, что $p_{2n,2n} = p_{0,2n} = u_{2n}$. Докажем (6) по индукции предполагая, что (6) выполнено при $m \leq r \leq n$. Рассмотрим множество траекторий, проводящих $2m$ единиц времени из $2n$ в зоне положительного выигрыша. Оно состоит из
(a) подмножества $N_1(r, m, n)$ траекторий , остающихся в положительном выйгрыше вплоть до момента $2r$ и проводящих $2m - 2r$, $r = \{1, 2, \ldots, m\}$ единиц времени на положительной стороне в течение $2n - 2r$ единиц времени,
(b) из подмножества $N_2(r, m, n)$ траекторий в зоне отрицательного выйгрыша вплоть до момента $2r$, $r = \{1, 2, \ldots, n - m\}$ и проводящих $2m$ единиц времени на положительной стороне в течение оставшихся $2n - 2r$ единиц времени.

По определению вероятностей $f_{2r}$, $p_{2m-2r,2n-2m}$ и выражения для полного числа траекторий $N = 2^{2n}$, число таких траекторий с учетом предположения индукции равно

$$N_1(r,m,n) = \frac{1}{2}\, 2^{2n}\, f_{2r}\, p_{2m-2r,2n-2r} = \frac{1}{2}\, 2^{2n}\, f_{2r}\, u_{2m-2r}\, u_{2n-2m},$$
$$N_2(r,m,n) = \frac{1}{2}\, 2^{2n}\, f_{2r}\, p_{2m,2n-2r} = \frac{1}{2}\, 2^{2n}\, f_{2r}\, u_{2m}\, u_{2n-2r-2m}.$$

Суммируя соответствующие вероятности и используя (3) и предположение индукции при $0 < m < n$, получаем формулу (6):

$$\begin{aligned} p_{2m,2n} &= \sum_{r=1}^{m} 2^{-2n} N_1(r,m,n) + \sum_{r=1}^{n-m} 2^{-2n} N_2(r,m,n) \\ &= \frac{1}{2}\, u_{2n-2m} \sum_{r=1}^{m} f_{2r}\, u_{2m-2r} + \frac{1}{2}\, u_{2m} \sum_{r=1}^{n-m} f_{2r}\, u_{2n-2r-2m} \\ &= u_{2n-2m} u_{2m}. \end{aligned}$$

Для завершения доказательства формулы (7) остается воспользоваться формулой Стирлинга. $\square$

# Классификация состояний цепи Маркова

Рассмотрим классификацию состояний цепи Маркова. Состояние $x_n$ называется *возвратным* (*невозвратным*), если вероятность возвращения за конечное число шагов равна единице (строго меньше единицы), и *поглощающим*, если цепь остается в этом состоянии с вероятностью единица. Состояние $x_i$ называется *достижимым* из состояния $x_j$, если $P^n_{ji}$ для некоторого конечного $n > 0$, где $P^n$ – степень переходной матрицы марковского процесса. *Замыканием* состояния $x_i$ называется множество всех состояний, достижимых из $x_j$. Состояние называется *положительным* (*нулевым*), если среднее число шагов между возвращениями конечно (бесконечно). Если наибольший общий делитель $d(j)$ чисел $n$, таких, что $P^n_{jj} > 0$, равен единице, то состояние $x_j$ называется *апериодическим*. Цепь Маркова называется *неприводимой*, если все ее состояния достижимы из любой начальной точки за конечное число шагов с положительной вероятностью, равномерно ограниченной снизу. Свойство неприводимости может иметь место только для цепей с конечным числом состояний. Достаточным условием неприводимости является неотрицательность всех элементов некоторой степени переходной матрицы.

# Теорема Перрона–Фробениуса

Существование предельного распределения состояний конечной марковской цепи, не зависящее от ее начального состояния, может быть установлено в невырожденном случае, если $P_{ij} \geq \delta > 0$.

**Теорема 2**

*Если переходные вероятности конечной $P_{ij}$ цепи Маркова строго положительны, то для любого начального распределения $\pi$ существует такое распределение $\{\pi_k^*\}$, что $\lim_{n\to\infty} P^n \pi = \pi^*$.*

*Доказательство.* Из определения $P$ следует, что $\sum_j P_{ij}^T = 1$, $\delta \leq P_{ij}^T$, $\sum_{j\neq j_0} P_{ij}^T = 1 - P_{ij_0}^T \leq 1 - \delta$. Заметим, что функция $f(\delta) = (1-\delta)x + \delta y$ – возрастающая при $y \geq x$, т.к. $f'(\delta) = y - x \geq 0$, а для возрастающих последовательностей $\{a_n\}_1^N, \{b_n\}_1^N$ и любой перестановки $\sigma : n \to \sigma(n)$ выполнены неравенства

$$\sum_n a_n b_{N-n+1} \leq \sum_n a_n b_{\sigma(n)} \leq \sum_n a_n b_n,$$

Следовательно выбирая $j_0 = \operatorname{argmin} a_i$ для $a = \{a_j\}$, получим

$$\max_i (P^T a)_i = \max_i \Big(\sum_{j\neq j_0} P^T_{ij} a_j + P^T_{ij_0} a_{j_0}\Big) \leq (1-\delta)\max_i a_i + \delta \min_i a_i,$$
$$\min_i (P^T a)_i = \min_i \Big(\sum_{j\neq j_0} P^T_{ij} a_j + P^T_{ij_0} a_{j_0}\Big) \geq (1-\delta)\min_i a_i + \delta \max_i a_i.$$

Поэтому $\max_i (P^T a)_i - \min_i (P^T a)_i \leq (1-2\delta)(\max_i a_i - \min_i a_i)$ и при $n \to \infty$ существует предел:

$$\max_i ((P^T)^n a)_i - \min_i ((P^T)^n a)_i \leq (1-2\delta)^n (\max_i a_i - \min_i a_i) \to 0.$$

Таким образом, $(P^T)^n a \to a^* e$, $a^* \in [\min_i a_i, \max_i a_i]$ – некоторая постоянная, а $e = \{1, \ldots, 1\}$ – вектор с единичными компонентами.

Поэтому предел $\lim_{n\to\infty}(P^n\pi, a) = \lim_{n\to\infty}(\pi, (P^T)^n a) = (\pi, e)a^* = a^*$ не зависит от $\pi$. В частности, выбирая $a^{(k)} = \{\underbrace{0, \ldots, 1}_{k}, \ldots, 0\}$,

можно найти компоненты распределения $\pi^*$:

$$\pi_k^* = \lim_{n\to\infty}(P^n\pi)_k = \lim_{n\to\infty}(P^n\pi, a^{(k)}) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\pi, (P^T)^n a^{(k)}) = (\pi, e)(a^{(k)})^* = (a^{(k)})^*,$$

где $(a^{(k)})^*\, e = \lim_{n\to\infty}(P^T)^n a^{(k)}$ и $(\pi, e) = 1$ в силу нормировки $\sum_i \pi_i = 1$. $\square$

**Следствие 1**

*Всякая конечная стохастическая матрица $P$ имеет единственный собственный вектор $\pi^*$ с неотрицательными компонентами, отвечающий собственному значению 1, остальные собственные значения по модулю не превосходят единицу. Столбцами предельной матрицы $P^* = \lim P^n$ являются векторы $\pi^*$, то есть $\mathrm{rank}\, P^* = 1$.*

*Доказательство*. Если бы существовал второй собственный вектор $\pi_2^*$, имеющий смысл распределения вероятностей, то его компоненты должны совпасть с компонентами вектора $\pi_k^*$:

$$(\pi_2^*)_k = \lim_{n\to\infty}(\pi_2^*, P^n a^{(k)}) = (\pi_2^*, e)(a^{(k)})^* = (a^{(k)})^* = \pi_k^*.$$

Поскольку предел $\lim(P^n\pi, a^{(k)}) = a_k^*$ не зависит от $\pi$, выбирая $\pi = \pi^{(j)} = \{\underbrace{0, \ldots, 1}_{j}, \ldots, 0\}$, мы выделяем $j$-й столбец матрицы $P^n$: $(P^n)^{(j)} = P^n\pi^{(j)}$, что не меняет значение предела. Поэтому все столбцы предельной матрицы $P^*$ равны $\pi^*$.

С другой стороны, пусть $x$ – собственный вектор матрицы $P$, отвечающий собственному значению $\lambda$ и $c = \max_i |x_i|$. Тогда для любого $x$: $\lambda x = P^T x$, имеем

$$|\lambda| c \leq \max_i \sum_j P_{ij}^T |x_j| \leq c \max_i \sum_j P_{ij}^T = c,$$

Поэтому $|\lambda| \leq 1$ и $||A|| = ||A^T|| \leq 1$. □

Этот результат распространяется на класс марковских цепей с неразложимыми стохастическими матрицами $P$, причем попутно удается получить вероятностную интерпретацию компонент предельного распределения: $\pi_k^*$ – частота посещения состояния $x_k$, то есть величина, обратная к среднему времени возвращения в состояние $x_k$.

Вероятность вернуться за один шаг совпадает с вероятностью остаться в исходном состоянии. Вероятность вернуться ровно за два шага не должна учитывать вероятности события, при котором процесс не покидал исходное состояние, и т.д.:

$$\begin{gathered} f_j^{(1)} = P_{jj}, \quad f_j^{(2)} = (P^2)_{jj} - f_j^{(1)} P_{jj}, \ \dots\ , \\ f_j^{(n)} = (P^n)_{jj} - \sum_{m=1}^{n-1} f_j^{(m)} (P^{n-m})_{jj}. \end{gathered} \tag{8}$$

События (8) несовместны, поэтому вероятность вернуться за конечное число шагов и среднее число шагов до возвращения равны

$$f_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}, \qquad \tau_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_f\, n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_j^{(n)}.$$

Напомним, что состояние $x_n$ называется *возвратным* (или *невозвратным*), если вероятность возвращения за конечное число шагов равна единице (или строго меньше единицы).

### Теорема 3

[a] *Необходимым и достаточным условием невозвратности состояния $x_j$ является $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^n < \infty$. Если состояние $x_j$ возвратное и апериодическое, то*

$$\lim_{n\to\infty} P_{jj}^n = \tau_j^{-1}.$$

[a] Алгебраическое доказательство аналога этого утверждения можно найти в книге Гантмахера Ф.Р. “Теория матриц” (М.: Наука, 1967), а вероятностное – в книге Ширяева А.И. “Вероятность” (М.: Наука, 1980).