Упражнение 9.1. *Для распределений, указанных в Таблице 9.2 (см. стр. 182), методом наибольшего правдоподобия построить выборочную оценку θ_N^* параметра θ и вычислить информацию Фишера $I(\theta) = -\mathbb{E}\,\partial_\theta^2 \mathcal{L}(\xi,\theta)$, $\mathcal{L}(x,\theta) = \ln p_\xi(x,\theta)$, где $p_\xi(x,\theta)$ –плотность распределения д. с. в. ξ.*

1) Пусть $\xi \in \mathcal{N}(\theta,\sigma)$. В этом случае

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\theta,\sigma) = -\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\ln(2\pi\sigma^2) + \frac{(x_n-\theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \mathbf{x} = \{\xi_1,\ldots,\xi_N\},$$

$$\theta_N^*:\ 0 = \partial_\theta \mathcal{L}(\mathbf{x},\theta,\sigma) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{n=1}^{N}(\theta - x_n), \quad \theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n, \quad \partial_\theta^2 \mathcal{L}(\xi,\theta,\sigma) = -\sigma^{-2}.$$

Поэтому $\theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$. Информация Фишера $I_N(\theta) = \mathbb{E}\,\partial_\theta^2 \mathcal{L}(\mathbf{x},\theta,\sigma) = N\sigma^{-2}$ характеризует точность выборочной оценки

$$\boxed{\theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n, \quad \theta = \theta_N^* + O(I_N(\theta)^{-1/2}) = \theta + O\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)}$$

Эта оценка вытекает из ЦПТ и не зависит от выборочных значений x_n. Она является несмещенной так как $\mathbb{E}\theta_N^* = \mathbb{E}x_n = \theta$.

2) Если $\xi \in \mathcal{N}(\mu,\theta)$, то

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\mu,\theta) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi\theta^2) - \sum_{n=1}^{N}\frac{(x_n-\mu)^2}{2\theta^2},$$

$$\theta_N^*:\ 0 = \partial_\theta \mathcal{L}(\mathbf{x},\theta,\sigma) = -\frac{N}{\theta} + \sum_{n=1}^{N}\frac{(x_n-\mu)^2}{\theta^3}, \quad (\theta_N^*)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2,$$

$$\partial_\theta^2 \mathcal{L}(\xi,\mu,\theta) = \theta^{-2} - \frac{3(\xi-\mu)^2}{\theta^4}.$$

Вычислим информацию Фишера:

$$I_N(\theta) = -\mathbb{E}\left(N\theta^{-2} - \sum_{n=1}^{N}\frac{3(x_n-\mu)^2}{\theta^4}\right) = -N\left(\theta^{-2} - \frac{3\theta^2}{\theta^4}\right) = \frac{2N}{\theta^2} \approx \frac{2N}{(\theta_N^*)^2}.$$

Следовательно, оценка погрешности линейно зависит от оценки неизвестного параметра:

$$\boxed{(\theta_N^*)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2, \quad \theta = \theta_N^* + O(I_N(\theta)^{-1/2}) = \theta_N^*\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2N}}\right)\right)}$$

Оценка $(\theta_N^*)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2$ является несмещенной так как

$$\mathbb{E}(\theta_N^*)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}(x_n-\mu)^2 = \mathbb{E}(\xi-\mu)^2 = \theta^2.$$

Из неравенства Иенсена $\mathbb{E}\,\theta_N^* \le (\mathbb{E}\,(\theta_N^*)^2)^{\frac{1}{2}} = \theta$ следует, что алгебраически эквивалентная оценка $\theta_N^* = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(x_n-\mu)^2}$, вообще говоря, является смещенной ($\mathbb{E}\,\theta_N^* \le \theta$), а из ЦПТ или закона больших чисел ясно, что она состоятельна: $\mathbb{E}\,\theta_N^* \uparrow \theta$ при $N \to \infty$.

3) Если $\xi \in \Gamma(\alpha,\theta)$, то

$$\mathcal{L}(\xi,\alpha,\theta) = \ln\left(\frac{\xi^{\alpha-1}e^{-\frac{\xi}{\theta}}}{\theta^\alpha\Gamma(\alpha)}\right) = -\frac{\xi}{\theta} - \alpha\ln\theta + \mathrm{const}, \quad \mathbf{x} = \{\xi_1,\ldots,\xi_N\},$$

$$\theta_N^* :\ 0 = \partial_\theta\mathcal{L}(\mathbf{x},\alpha,\theta) = \frac{1}{\theta}\sum_{n=1}^N x_n - \frac{\alpha}{\theta}, \quad \theta_N^* = \frac{1}{\alpha N}\sum_{n=1}^N x_n, \quad \partial_\theta^2\mathcal{L}(\xi,\alpha,\theta) = -\frac{2\xi}{\theta^3} + \frac{\alpha}{\theta^2}.$$

Поскольку первый момент гамма-распределения равен $\mathbb{E}\,\xi = \mathbb{E}\,x_n = \alpha\theta$ (см. Таблицу 1.1, стр. 27), то $I_N(\theta) = -\mathbb{E}\sum_{n=1}^N\left(\frac{2x_n}{\theta^3} - \frac{\alpha}{\theta^2}\right) = N\frac{\alpha}{\theta^2}$ и $\mathbb{E}\theta_N^* = \frac{1}{\alpha N}\sum_{n=1}^N x_n = \theta$. Следовательно, полученная оценка является несмещенной и

$$\boxed{\theta_N^* = \frac{1}{\alpha N}\sum_{n=1}^N x_n, \quad \theta = \theta_N^*\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right)\right)}$$

4) Если $\xi \in \Pi(\theta)$, то

$$p(n,\theta) = \frac{\theta^n}{n!}e^{-\theta}, \quad \mathcal{L}(\xi,\theta) = n\ln\theta + \theta + \mathrm{const}, \quad \mathbf{x} = \{\xi_1,\ldots,\xi_N\},$$

$$\theta_N^* :\ 0 = \partial_\theta\mathcal{L}(\mathbf{x},\theta) = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^N(n_k - 1), \quad \theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N n_k, \quad \partial_\theta^2\mathcal{L}(\xi,\theta) = -\frac{1}{\theta^2}.$$

Поэтому $I_N(\theta) = N\frac{1}{\theta^2}$ и $\mathbb{E}\theta_N^* = \mathbb{E}n_1 = \theta$. Следовательно, полученная оценка является несмещенной и

$$\boxed{\theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n, \quad \theta = \theta_N^* + O(I_N(\theta)^{-1/2}) = \theta_N^*\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right)}$$

5) Если $\xi \in Bi(K,\theta)$, то

$$p_K(k,\theta) = C_K^k\theta^k(1-\theta)^{K-k}, \quad \mathcal{L}(k,K,\theta) = k\ln\theta + (K-k)\ln(1-\theta) + \mathrm{const}, \quad \mathbf{x} = \{n_1,\ldots,n_N\},$$

$$\theta_N^* :\ 0 = \partial_\theta\mathcal{L}(\mathbf{x},K,\theta) = \frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^N n_k - \frac{1}{1-\theta}\sum_{k=1}^N(K - n_k), \quad \theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\frac{n_k}{K},$$

$$\partial_\theta^2\mathcal{L}(\mathbf{x},K,\theta) = -\sum_{k=1}^N\left(\frac{n_k}{\theta^2} + \frac{K-n_k}{(1-\theta)^2}\right), \quad \mathbb{E}\,n_k = K\theta.$$

Поэтому

$$I_N(\theta) = \mathbb{E}\sum_{k=1}^N\left(\frac{n_k}{\theta^2} + \frac{K-n_k}{(1-\theta)^2}\right) = KN\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{KN}{\theta(1-\theta)}$$

и $\mathbb{E}\theta_N^* = \mathbb{E}\frac{n_1}{K} = \theta$. Следовательно, оценка

$$\boxed{\theta_N^* = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\frac{n_k}{K}, \quad \theta = \theta_N^* + O(I_N(\theta)^{-1/2}) = \theta_N^* + O\left(\frac{\theta_N^*(1-\theta_N^*)}{KN}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

является несмещенной.

6) Если $\xi \in \overline{Bi}(K,\theta)$, то

$$p_K(k,\theta) = C^k_{K+k-1}\theta^K(1-\theta)^k, \quad \mathcal{L}(k,K,\theta) = K\ln\theta + (K-k)\ln(1-\theta) + \mathrm{const},$$

$$\theta^*_N:\ 0 = \partial_\theta\mathcal{L}(\mathbf{x},\theta) = \frac{KN}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}\sum_{k=1}^N n_k, \quad \frac{1-\theta^*_N}{\theta^*_N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \frac{n_k}{K},$$

$$\partial^2_\theta\mathcal{L}(\mathbf{x},\theta) = -\sum_{k=1}^N\left(\frac{K}{\theta^2} + \frac{n_k}{(1-\theta)^2}\right), \quad \mathbb{E}\,n_k = K\frac{1-\theta}{\theta}$$

(см. Таблицу 1.1 на стр. 27). Поэтому

$$I_N(\theta) = \mathbb{E}\sum_{k=1}^N\left(\frac{K}{\theta^2} + \frac{n_k}{\theta(1-\theta)}\right) = \frac{KN}{\theta}\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{KN}{\theta^2(1-\theta)}.$$

Следовательно, несмещенной является оценка функции от θ:

$$\boxed{\frac{1-\theta^*_N}{\theta^*_N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\frac{n_k}{K}, \quad \mathbb{E}\,\frac{1-\theta^*_N}{\theta^*_N} = \mathbb{E}\,\frac{n_1}{K} = \frac{1-\theta}{\theta}}$$

точность которой оценивается стандартным образом в терминах информации Фишера:

$$\theta = \theta^*_N + O(I_N(\theta)^{-1/2}) = \theta^*_N\left(1 + O\left(\frac{1-\theta^*_N}{KN}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Из неравенства Иенсена $\mathbb{E}\,\xi^{-1} \geq (\mathbb{E}\,\xi)^{-1}$ следует, что явная оценка

$$\theta^*_N = \left(1 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\frac{n_k}{K}\right)^{-1}, \quad \mathbb{E}\,\theta^*_N \geq \left(1 + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\frac{\mathbb{E}\,n_k}{K}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1-\theta}{\theta}\right)^{-1} = \theta$$

оказывается смещенной и, в силу закона больших чисел, состоятельной: $\mathbb{E}\,\theta^*_N \downarrow \theta$ при $N\to\infty$.

7) Если $\xi \in P(x_{\min},\theta)$, то

$$p(x,x_{\min},\theta) = \frac{\theta x^\theta_{\min}}{x^{\theta+1}}, \quad \mathcal{L}(\mathbf{x},x_{\min},\theta) = N\theta + N\theta\ln x_{\min} - (\theta+1)\sum_{n=1}^N\ln x_n,$$

$$\theta^*_N:\ 0 = \partial_\theta\mathcal{L}(\mathbf{x},\theta) = \frac{N}{\theta} + N\ln x_{\min} - (\theta+1)\sum_{n=1}^N\ln x_n, \quad \frac{1}{\theta^*_N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\ln\frac{x_n}{x_{\min}},$$

$$\partial^2_\theta\mathcal{L}(\mathbf{x},\theta) = -\frac{N}{\theta^2}, \quad \mathbb{E}\,\ln x_1 = -\int_{\min}^\infty \ln x\, d\left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^\theta = \ln x_{\min} - \theta^{-1}.$$

Поэтому несмещенной оказывается оценка обратного параметра $(\theta^*_N)^{-1}$:

$$\boxed{\mathbb{E}\,(\theta^*_N)^{-1} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\ln\frac{x_{\min}}{\mathbb{E}\,x_n} = \ln\frac{x_{\min}}{\mathbb{E}\,x_1} = \theta^{-1}, \quad \theta^{-1} = (\theta^*_N)^{-1} + O\left(\frac{\theta^*_N}{\sqrt{N}}\right)}$$

Из неравенства Иенсена $\mathbb{E}\,\xi^{-1} \geq (\mathbb{E}\,\xi)^{-1}$ следует, что алгебраически эквивалентная оценка $\theta^*_N = \left(\ln\frac{x_{\min}}{\mathbb{E}\,x_1}\right)^{-1} \approx \theta$ является смещенной и состоятельной:

$$\mathbb{E}\,\theta^*_N \geq (\mathbb{E}\,(\theta^*_N)^{-1})^{-1} = \theta, \quad \mathbb{E}\,\theta^*_N \downarrow \theta \quad \text{при} \quad N\to\infty.$$