ФНБИК, Кафедра математики и математической физики

"Теория вероятностей и математическая статистика" – 2012

Кр2

1. Пусть $\{x_1, \ldots, x_N\}$ -независимые целочисленные выборочные значения случайной величины x, имеющей биномиальное распределение

$$\mathcal{B}(p, M):\ P_M\{x = m\} = C_M^m p^m (1-p)^{M-m}.$$

Показать, что x_n/M и $x_i/M(1{-}x_j/M)$, $i \neq j$, можно использовать как выборочные *несмещенные* оценки p и $\sigma^2 = p(1-p)$ соответственно. Напомним, что случайная величина ξ называется *несмещенной* оценкой параметра θ, если $\mathbb{E}\xi = \theta$.

1. Пусть $\{x_1, \ldots, x_N\}$ -независимые целочисленные выборочные значения случайной величины x, имеющей пуассоновское распределение $P_\lambda\{x = m\} = \frac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}$. Показать, что $x(N) = \sum_{n=1}^N x_n/N$ можно использовать как *состоятельную* выборочную оценку λ при любом N. Для доказательства воспользоваться неравенством Чебышева $P\{|\chi - c| \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon}\, \mathbb{E}\, |\chi - c|^2$. Напомним, что случайная величина $x(N)$ называется *состоятельной* оценкой параметра θ, если $P\{|x(N) - \theta| \geq \epsilon\} \to 0$ при $N \to \infty$ для любого $\epsilon > 0$.

1. Пусть $\{x_n\}_1^N$ - независимые выборочные значения случайной величины $\xi \in N(\mu, \sigma)$. Показать, что среднее $\mu_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n$ и дисперсия $\sigma_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^N (x_n - \mu_N)^2$ являются независимыми случайными величинами.

1. Пусть $\{x_n\}_1^N$ - независимые выборочные значения случайной величины $\xi \in N(\mu, \sigma)$. Используя распределение Стьюдента оценить вероятность $\mu_N - \epsilon \leq \mu \leq \mu_N + \delta$.

1. Пусть $\{x_n\}_1^N$ - независимые выборочные значения случайной величины $\xi \in N(\mu, \sigma)$. Используя распределение Фишера оценить вероятность $\sigma_N^2 - \epsilon \leq \sigma^2 \leq \sigma_N^2 + \delta$.

1. Пусть $x, y \in [-1, 1]$ – независимые действительные случайные величины с плотностями распределения $p_x(r) \equiv \frac{1}{2}$ и $p_y(r) \equiv \frac{1}{2}$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $z = \max\{x, y\}$.

1. Пусть $x, y \in [-1, 1]$ – независимые действительные случайные величины с плотностями распределения $p_x(r) \equiv \frac{1}{2}$ и $p_y(r) \equiv \frac{1}{2}$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $z = \min\{x, y\}$.

1. Пусть $x = \{\xi_n\}_1^N \in \mathbb{R}^N$, где ξ_n – независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением. Вычислить распределение случайной величины $r = |x|^2 \in \mathbb{R}_+$.

1. В какой точке плотность распределения Фишера $P_{f_{M,N}}(x)$ достигает максимума?

1. Существует ли предельное распределение $P(x) = \lim_{N\to\infty} P_{t_N}(x)$, где $P_{t_N}(x)$ - распределение Стьюдента с N степенями свободы?

1. Пусть μ_N и σ_N^2 –выборочные оценки параметров нормального распределения $N(\mu, \sigma)$ и s_1, $s_2 > 0$. Вычислить вероятность события $\mu_N - \frac{s_1\sigma_N^2}{\sqrt{N}} < \mu < \mu_N + \frac{s_2\sigma_N^2}{\sqrt{N}}$.

1. Пусть μ_N и σ_N^2 –выборочные оценки параметров нормального распределения $N(\mu, \sigma)$ и $g_1 > g_2 > 0$. Вычислить вероятность события $\frac{(N-1)\sigma_N^2}{g_1} < \sigma^2 < \frac{(N-1)\sigma_N^2}{g_2}$.

1. С помощью формулы Стирлинга показать, что плотность распределения Стьюдента $p_{t_N}(x)$ сходится к стандартному нормальному распределению. Напомним, что

$$p_{t_N}(x) = \frac{c_N}{\left(1 + \frac{x^2}{N-1}\right)^{\frac{N}{2}}}, \quad c_N = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi(N-1)}\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}.$$

1. Показать, что если $F(x)$ –кумулятивное распределение случайной величины ξ, то случайная величина $\mu = F(\xi)$ имеет равномерное распределение.

1. Пусть $F(x)$ –кумулятивное распределение действительной случайной величины ξ. Вычислить среднее значение случайной величины $\mu = F(\xi)$.

1. Пусть $F(x)$ –кумулятивное распределение случайной величины ξ. Вычислить дисперсию случайной величины $\mu = F(\xi)$.

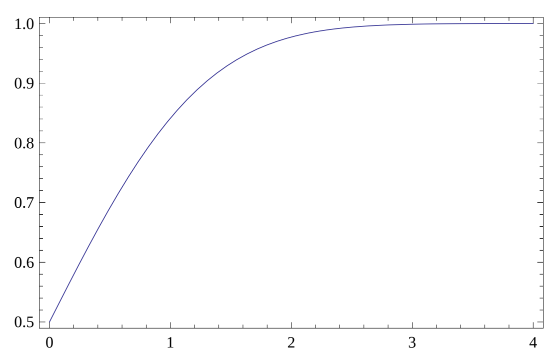
1. Пусть д. с. в. ξ имеет распределение Парето $P(1, a)$ и $x_N = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$. Вычислить $\mathbb{E} \ln x_N$.

1. Пусть $\xi \in N(0, 1)$ и $\mu \in \chi_n^2$ –независимые д. с. в. Вычислить распределение $\frac{\xi}{\chi_n^2}$.

1. Показать, что ковариационная матрица n-мерной случайной величины с действительными компонентами неотрицательно определена.

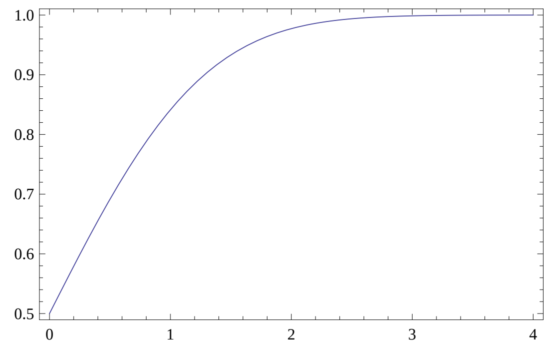
---

2. Для массива из $N = 100$ экспериментальных точек определено выборочное среднее $\mu_N = 1$ и дисперсия $\sigma_N^2 = 0.04$. Какую погрешность можно гарантировать с вероятностью $P = 0.95$? Воспользуйтесь центральной предельной теоремой и графиком кумулятивного распределения стандартной нормально распределенной случайной величины.



2. Для массива из $N = 100$ экспериментальных точек определено выборочное среднее $\mu_N = 1$ и дисперсия $\sigma_N^2 = 0.04$. Какова вероятность того, что истинное среднее отличается от μ_N в любую сторону не более, чем на 0.1? Воспользуйтесь центральной предельной

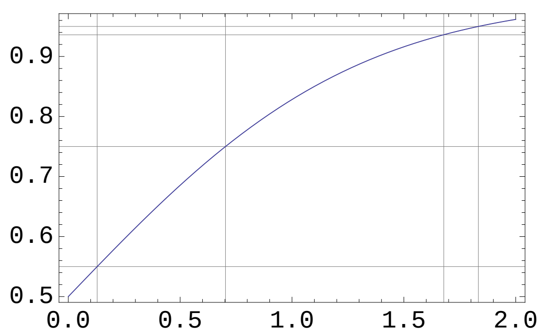
теоремой и графиком кумулятивного распределения стандартной нормально распределенной случайной величины.



2. Для массива из $N = 10$ случайных точек

$$\{3.307, 3.513, 3.979, 3.298, 3.081, 3.519, 3.371, 4.101, 3.789, 3.091\},$$

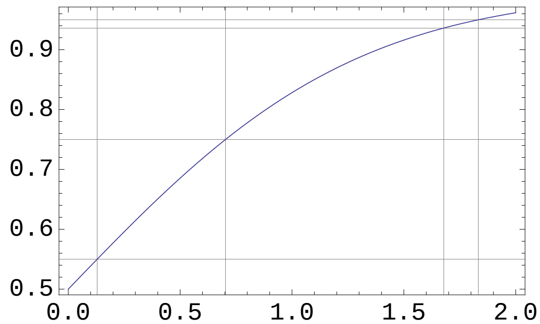
имеющих неизвестное среднее μ и известную дисперсию $\sigma^2 = 0.25$ определены выборочное среднее $\mu_N = 3.4$ и выборочная дисперсия $\sigma_N^2 = 0.222$. Используя приведенное на графике распределение Стьюдента с 9 степенями свободы, найдите доверительные интервалы, содержащие среднее значение μ с вероятностями $0.1,\ 0.5,\ 0.9$.



2. Для массива из $N = 10$ случайных точек

$$\{3.307, 3.513, 3.979, 3.298, 3.081, 3.519, 3.371, 4.101, 3.789, 3.091\},$$

имеющих неизвестное среднее μ и известную дисперсию $\sigma^2 = 0.25$ определены выборочное среднее $\mu_N = 3.4$ и выборочная дисперсия $\sigma_N^2 = 0.222$. Используя приведенное на графике распределение Стьюдента с 9 степенями свободы, найдите вероятность события $\mu \in [\pi, \mu_N]$.



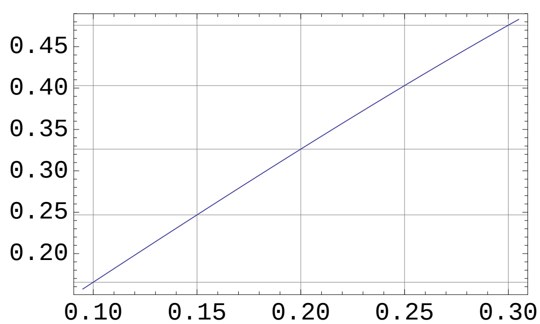
2. Для массива из $N = 10$ случайных точек

$$\{2.637, 3.349, 2.466, 2.77, 3.767, 2.351, 2.365, 2.253, 2.753, 2.707\},$$

имеющих известное среднее $\mu = \pi$ и неизвестную дисперсию определена выборочная дисперсия $\sigma_N^2 = 0.227$. Используя приведенное на графике распределение

$$\text{CDF[ChiSquareDistribution[9]}, 9/(1 - \text{eps})] - \text{CDF[ChiSquareDistribution[9]}, 9/(1 + \text{eps})],$$

найдите вероятность события $\sigma^2 \in [\sigma_N^2 (1 - \epsilon), \sigma_N^2 (1 + \epsilon)]$, $\epsilon = 0.1$.

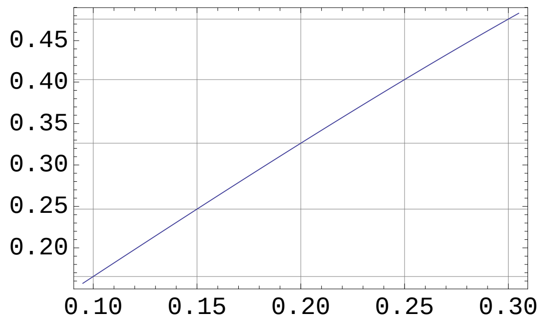


2. Для массива из $N = 10$ случайных точек

$$\{2.637, 3.349, 2.466, 2.77, 3.767, 2.351, 2.365, 2.253, 2.753, 2.707\},$$

имеющих известное среднее $\mu = \pi$ и неизвестную дисперсию σ определить выборочную дисперсию Используя приведенное на графике распределение

$$\text{CDF[ChiSquareDistribution[9]}, 9/(1 - \text{eps})] - \text{CDF[ChiSquareDistribution[9]}, 9/(1 + \text{eps})],$$



найдите вероятность события $\sigma^2 \in [\sigma_N^2\,(1-\epsilon), \sigma_N^2\,(1+\epsilon)]$, $\sigma^2 = 0.25$, $\epsilon = 0.3$.

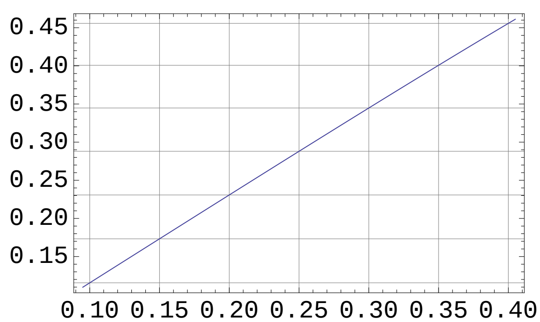
2. Для двух массивов из $N = 10$ и $M = 8$ случайных точек

$$\{-0.925, 0.0462, -0.359, 0.259, 0.581, -0.260, -0.399, -0.700, 0.915, 0.143\},$$
$$\{0.148, -0.810, -0.357, 0.0389, -0.484, -0.080, -0.350, 0.813\}$$

имеющих среднее $\mu = 0$ и неизвестные дисперсии определены выборочные дисперсии $\sigma_{10}^2 = 0.173$, $\sigma_8^2 = 0.279$. Используя приведенное на графике распределение

$$\mathrm{CDF}[\mathrm{FRatioDistribution}[10,8], 1+\mathrm{eps}] - \mathrm{CDF}[\mathrm{FRatioDistribution}[10,8], 1-\mathrm{eps}]$$

со степенями свободы (10,8), найдите вероятность события $\sigma_{10}^2/\sigma_8^2 = 0.621 \in [1-\epsilon, 1+\epsilon)]$, для минимального значения ϵ.



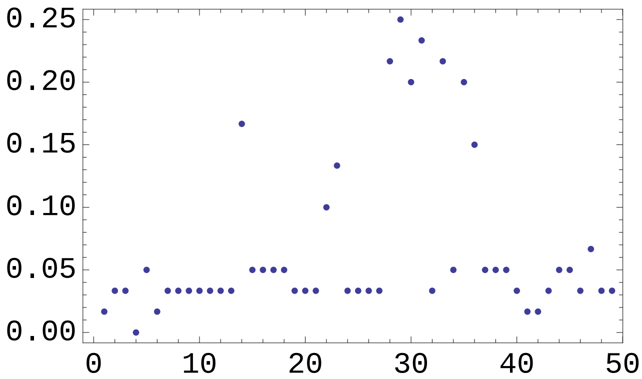
2. Для двух массивов из $N = 30$ и $M = 20$ случайных точек построены графики ранговых распределений и найдена их разность, изображенная на левом графике. На правом графике приводится распределение Колмогорова. С помощью критерия Смирнова–Колмогорова проверить гипотезу о совпадении выборочных распределений. Какова вероятность того, что распределения совпадают?

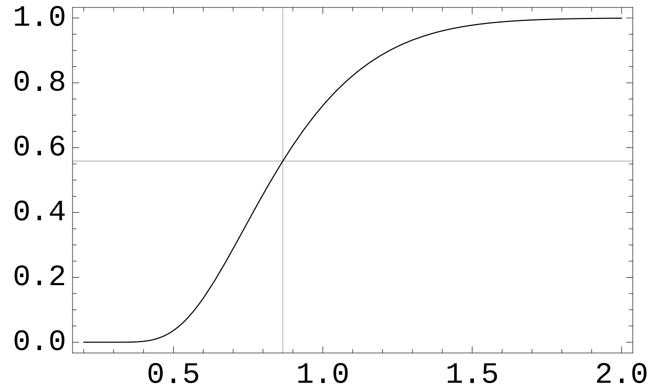
2. Найти точку, в которой $p_{\chi_N^2}(x)$ достигает максимума.

2. Вычислить среднее и дисперсию распределения t_N.

2. Вычислить среднее и дисперсию распределения χ_N^2.

2. Вычислить среднее распределения Фишера $f_{k,m}$.





2. Вычислить ковариационную матрицу погрешности оценки $b - b^* = (A^T A)^{-1} A^T \xi$ параметров b для метода наименьших квадратов, считая, что компоненты вектора ошибок независимые случайные величины, имеющие распределение $N(0, \sigma)$.

2. Пусть $x \in R$, ξ –д. с. в. и $\mu(\xi|x) = I_{(-\infty,x]}(\xi)$. Вычислить среднее и дисперсию д. с. в. $\mu(x, \xi)$.

---

3. Пусть $\{x_{1,1}, \dots, x_{1,N_1}; x_{2,1}, \dots, x_{2,N_2}; \dots; x_{K,1}, \dots, x_{K,N_K}\}$ - выборочные значения случайной величины $\xi \in N(\mu, \sigma)$ разбитые на K групп по $N_1, \dots, N_K$ элементов, $N = N_1 + \dots + N_K$. Пусть $X = \frac{1}{N}\sum_{k,n} x_{k,n}$ - глобальное выборочное среднее и $X_k = \frac{1}{N_k}\sum_n x_{k,n}$ - внутригрупповые средние. Показать, что имеет место теорема Пифагора $Q = Q_1 + Q_2$, где

$$Q = \sum_{k,n}(X - x_{k,n})^2, \qquad Q_1 = \sum_k N_k (X - X_k)^2, \qquad Q_2 = \sum_{k,n}(X_k - x_{k,n})^2.$$

3. Пусть $\{x_{1,1}, \dots, x_{1,N_1}; x_{2,1}, \dots, x_{2,N_2}; \dots; x_{K,1}, \dots, x_{K,N_K}\}$ - выборочные значения случайной величины $\xi \in N(\mu, \sigma)$ разбитые на K групп по $N_1, \dots, N_K$ элементов, $N = N_1 + \dots + N_K$. Пусть $X = \frac{1}{N}\sum_{k,n} x_{k,n}$ - глобальное выборочное среднее и $X_k = \frac{1}{N_k}\sum_n x_{k,n}$ - внутригрупповые средние

$$Q = \sum_{k,n}(X - x_{k,n})^2, \qquad Q_1 = \sum_k N_k (X - X_k)^2, \qquad Q_2 = \sum_{k,n}(X_k - x_{k,n})^2.$$

Представить Q_1 и Q_2 в виде квадратичных форм проекторов.

3. Пусть $\{x_{1,1}, \dots, x_{1,N_1}; x_{2,1}, \dots, x_{2,N_2}; \dots; x_{K,1}, \dots, x_{K,N_K}\}$ - выборочные значения случайной величины $\xi \in N(\mu, \sigma)$ разбитые на K групп по $N_1, \dots, N_K$ элементов, $N = N_1 + \dots + N_K$. Пусть $X = \frac{1}{N}\sum_{k,n} x_{k,n}$ - глобальное выборочное среднее и $X_k = \frac{1}{N_k}\sum_n x_{k,n}$ - внутригрупповые средние

$$Q = \sum_{k,n}(X - x_{k,n})^2, \qquad Q_1 = \sum_k N_k (X - X_k)^2, \qquad Q_2 = \sum_{k,n}(X_k - x_{k,n})^2.$$

Сколько степеней свободы имеют случайные величины Q_1 и Q_2?

3. Пусть $R > 0$ и x – гауссова случайная величина с нулевым средним и нормальным распределением

$$P(x \in B) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2}\sqrt{\det R}} \int_B e^{-\frac{1}{2}(x,R^{-1}x)} d^K x.$$

Показать, что $\mathbb{E}(h,x)(g,x) = (h, \mathbb{E}\, x \otimes x\, g) = (h, Rg)$ для любых $g, h \in \mathbb{R}^K$, то есть R – ковариационная матрица.

3. Пусть случайная величина x имеет распределение $p_k = P(x \in \Omega_k)$, $\Omega = \sqcup_k \Omega_k$ и

$$z(x) = \left\{ \frac{I_{\Omega_k}(x) - p_k}{\sqrt{p_k}} \right\} \in \mathbb{R}^K.$$

Показать, что ковариационная матрица случайного вектора $z(x)$ равна $R = \mathbb{E} z(x) \otimes \mathbb{Z}(x) = I - e_p \otimes e_p$, где $e_p = \{\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_K}\}$.

3. Пусть $A : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ - матрица полного ранга $K < N$. Показать, что $\det A^T A > 0$ и для любого $y \in \mathbb{R}^N$

$$\mathrm{argmin}_b |y - Ab| = (A^T A)^{-1} A^T y.$$

3. Пусть $A : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ - матрица полного ранга $K < N$. Показать, что если $b^* = (A^T A)^{-1} A^T y$, $Ab = y + \xi$, где $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\mathbb{E}(b_k - b_k^*)^2 = \Lambda_{kk}$, где $\Lambda = (A^T A)^{-1}$.

3. Пусть $A : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ - матрица полного ранга $K < N$. Показать, что если $\xi \in N(0,1)$, то $b - b^*$ и $(\xi, (I - \pi_A)\xi)$ – независимые случайные величины.

3. Пусть $A : \mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^N$ - матрица полного ранга $K < N$. Для переопределенной системы $y_n + \xi_n = b_0 + b_1 x_n$ с заданными $\{x_n, y_n\}$, найти b_0^*, b_1^* методом наименьших квадратов.

3. Методом Форсайта построить 4 ортогональных полинома на равномерной сетке, имеющий шаг h и состоящей из N узлов.

3. Пусть A -$K \times M$-матрица ранга $K < M$, K –число строк. Как доказать, что матрица AA^T положительно определена и имеет ранг K?

3. Убедиться, что $\int_R \delta(x - \lambda y) f(y)\, dy = |\lambda|^{-1} f(\lambda^{-1} x)$. Как выглядит эта формула в $x,\, y \in R^N$, если $\delta(x) = \prod_{n=1}^N \delta(x_n)$ и λ –невырожденная $(n \times n)$-матрица?

3. Пусть p_n –вероятность того, что выборочное значение случайной величины ξ попадает в область Ω_n, $n \le N$. Области Ω_n не пересекаются, а из объединение содержит все возможные значения случайной величины ξ. Вычислить корреляционную функцию компонент $z_n(\xi) = \frac{I_{\Omega_n}(\xi) - p_n}{\sqrt{p_n}}$ случайного вектора $z(\xi) \in R^N$.

3. Вывести формулы МНК для погрешностей оценок коэффициентов $b_n - b_n^*$ при использовании ортогональных сеточных полиномов и вычислить корреляционные функции $\mathbb{E}(b_n - b_n^*)(b_m - b_m^*)$ при стандартных предположениях относительно погрешностей измерений.

3. Вывести формулы МНК для погрешностей оценок экспериментальных точек $y_n - y_n^*$ при использовании ортогональных сеточных полиномов и вычислить корреляционные функции $\mathbb{E}(y_n - y_n^*)(y_m - y_m^*)$ при стандартных предположениях относительно погрешностей измерений.

3. Вывести формулы МНК для погрешностей оценок коэффициентов $b_n - b_n^*$ при использовании сеточных полиномов и вычислить корреляционные функции $\mathbb{E}(b_n - b_n^*)(b_m - b_m^*)$ при стандартных предположениях относительно погрешностей измерений.

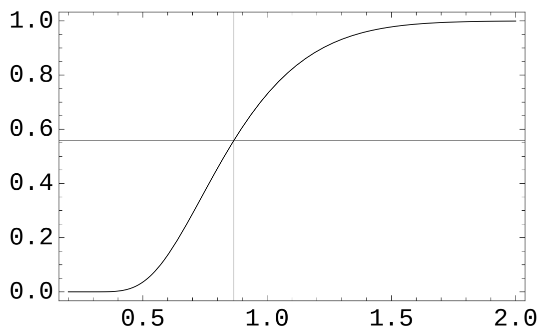
3. Вывести формулы МНК для погрешностей оценок экспериментальных точек $y_n - y_n^*$ при использовании сеточных полиномов и вычислить корреляционные функции $\mathbb{E}(y_n - y_n^*)(y_m - y_m^*)$ при стандартных предположениях относительно погрешностей измерений.

---

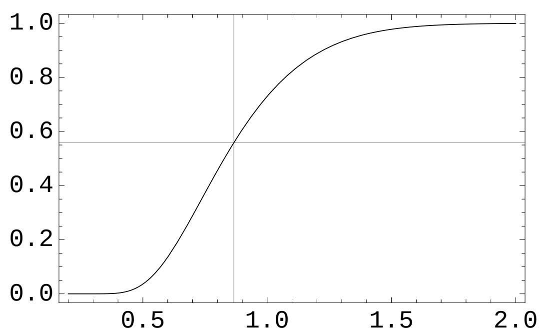
4. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\{\xi_n\}_1^N$ - независимые выборочные значения случайной величины ξ и $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N I_{(-\infty,x]}(\xi_n)$ -ранговое распределение, $\mathbb{E}F_N(x) = F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi)d\xi$. Вычислить ковариацию $\mathbb{E}(F_N(x) - F(x))^2$.

4. Пусть $x \in \mathbb{R}$, $\{\xi_n\}_1^N$ - независимые выборочные значения случайной величины ξ и $F_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N I_{(-\infty,x]}(\xi_n)$ -ранговое распределение, $\mathbb{E}F_N(x) = F(x) = \int_{-\infty}^x p(\xi)d\xi$. С помощью неравенства Чебышева доказать сходимость рангового распределения по вероятности: $\lim_{N\to\infty} P(|F_N(x) - F(x)| > \epsilon) = 0$.

4. Пусть для выборки из 100 точек $\max|F(x) - F_N(x)| = 0.1$. С помощью критерия Колмогорова оценить вероятность того, что такой максимум принимает меньшие значения.



4. Пусть для независимых выборок $N = 20$, $M = 25$ из одного и того же распределения получена оценка $\max|F_N(x) - G_M(x)| = 0.1$. С помощью критерия Смирнова оценить вероятность того, что такой максимум принимает меньшие значения.



4. Для заданного набора $\{x_n\}$ выборочных значений случайной величины ξ методом максимального правдоподобия найти оценки параметра $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ для среднего значения и

дисперсии нормального распределеия $N(\mu, \sigma)$:

$$\{x_n\}_1^{25} = \{0.6, 3.32, 0.48, 1.97, 2.51, 1.74, 2.58, 2.94, 3.6, 2.68, 2.84,\\ 3.71, 1.01, 2.05, 3.17, 1.53, 1.57, 2.21, 0.31, 2.1, 1.79, 1.12, 0.41, 2.41, 2.5\}.$$

Оценить выборочную дисперсию этой величины.

4. Для заданного набора $\{x_n\}$ выборочных значений случайной величины ξ методом максимального правдоподобия найти оценку параметра θ для гамма-распределения $\Gamma(2, \theta)$.

$$\{x_n\} = \{1.11, 0.63, 4.11, 3.03, 1.58, 0.42, 0.37, 0.53, 3.69, 1.29, 2.97, 4.50, 4.57, 1.63,\\ 3.63, 0.98, 0.27, 0.61, 1.15, 3.26, 3.71, 1.3, 2.96, 0.56, 1.08\}.$$

Оценить выборочную дисперсию этой величины.

4. Для заданного набора $\{x_n\}$ выборочных значений случайной величины ξ методом максимального правдоподобия найти оценку параметра θ для распределения Бернулли $Bi(n, \theta)$.

$$\{x_n\}_1^{25} = \{3, 3, 4, 2, 1, 0, 1, 2, 2, 2, 1, 4, 0, 2, 2, 1, 1, 2, 7, 2, 3, 2, 1, 2, 2\}.$$

Оценить выборочную дисперсию этой величины.

4. Для заданного набора $\{x_n\}$ выборочных значений случайной величины ξ методом максимального правдоподобия найти оценку параметра θ для дисперсии пуассоновского распределеия $\Pi(\theta)$,

$$\{x_n\}_1^{25} = \{2, 3, 0, 2, 2, 3, 1, 4, 2, 6, 3, 3, 2, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}.$$

Оценить выборочную дисперсию этой величины.

4. Для заданного набора $\{x_n\}$ выборочных значений случайной величины ξ методом максимального правдоподобия найти оценки параметра θ для распределения Парето $P(1, \theta)$,

$$\{x_n\}_1^{25} = \{1.27, 1.2, 1.08, 2.22, 1.13, 1.01, 1.03, 1.05, 1.003, 1.2, 1.09, 1.38, 1.94, 1.09,\\ 1.31, 1.04, 1.05, 1.39, 1.11, 3.7, 9.81, 1.71, 1.18, 1.15, 1.25\}.$$

Оценить выборочную дисперсию этой величины.

4. Вычислить информацию Фишера для среднего значения нормального распределеия $N(\theta, \sigma)$.

4. Вычислить информацию Фишера для дисперсии нормального распределеия $N(\mu, \theta)$.

4. Вычислить информацию Фишера для гамма-распределения $\Gamma(\lambda, \theta)$.

4. Вычислить информацию Фишера для распределения Бернулли $Bi(n, \theta)$.

4. Вычислить информацию Фишера для распределения Парето $P(x_0, \theta)$.

4. Вычислить информацию Фишера для пуассоновского распределения $\Pi(\theta)$.

4. Вычислить информацию Фишера для распределения Коши $(0, \theta)$.

4. Методом наибольшего правдоподобия вычислить оптимальную оценку параметра θ для гамма-распределения $\Gamma(\lambda, \theta)$. Является ли эта оценка несмещенной?

4. Методом наибольшего правдоподобия вычислить оптимальную оценку параметра θ для распределения Бернулли $Bi(n, \theta)$. Является ли эта оценка несмещенной?

4. Методом наибольшего правдоподобия вычислить оптимальную оценку параметра θ для распределения Парето $P(x_0, \theta)$. Является ли эта оценка несмещенной?

4. Методом наибольшего правдоподобия вычислить оптимальную оценку параметра θ для пуассоновского распределения $\Pi(\theta)$. Является ли эта оценка несмещенной?

4. Методом наибольшего правдоподобия вычислить оптимальную оценку параметра θ для распределения Коши $(0, \theta)$. Является ли эта оценка несмещенной?

4. Показать, что для функции правдоподобия $\mathcal{L}(\mathbf{x}|\theta)$ выполнено равенство $-\mathbb{E}_\theta\, \partial_\theta^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}|\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\partial_\theta \mathcal{L}(\mathbf{x}|\theta)\right)^2$.

4. Показать, что для функции правдоподобия $\mathcal{L}(\mathbf{x}|\theta)$ выполнено равенство $\partial_\theta \mathbb{E}_\theta\, T(\mathbf{x}) = \mathbb{E}_\theta T(\mathbf{x}) \partial_\theta \mathcal{L}(\mathbf{x}|\theta)$.