ФНБИК, Кафедра математики и математической физики

"Теория вероятностей и математическая статистика" – 2012

Кр1

1. Физический тест сложных молекул правильно различает молекулы A и B в 95% случаев, т.е. $P(a|A) = P(b|B) = 0.95$, где a и b означают результат тестирования для соответствующей молекулы, а вероятности ошибочных результатов равны $P(b|A) = P(a|B) = 0.05$. Эти цифры характеризуют аппаратную надежность тестов. Предположим, что молекулы типов A и B в потоке частиц встречаются с вероятностями $P(A) = 0.8$ и $P(B) = 0.2$ соответственно. Используя формулу Байеса, вычислите $P(A|b)$.

1. Физический тест сложных молекул правильно различает молекулы A и B в 96% случаев, т.е. $P(a|A) = P(b|B) = 0.96$, где a и b означают результат тестирования для соответствующей молекулы, а вероятности ошибочных результатов равны $P(b|A) = P(a|B) = 0.04$. Эти цифры характеризуют аппаратную надежность тестов. Предположим, что молекулы типов A и B в потоке частиц встречаются с вероятностями $P(A) = 0.7$ и $P(B) = 0.3$ соответственно. Используя формулу Байеса, вычислите $P(B|a)$.

1. Физический тест сложных молекул правильно различает молекулы A и B с вероятностями $P(a|A)$ и $P(b|B)$, где a и b означают результат тестирования для соответствующей молекулы, а вероятности ошибочных результатов равны $P(b|A) = 1 - P(a|A)$, $P(a|B) = 1 - P(b|B)$. Предположим, что молекулы типов A и B в потоке частиц встречаются с вероятностями $P(A)$ и $P(B)$ соответственно, так что $P(A) + P(B) = 1$. Используя формулу Байеса, покажите, что $P(A|b) + P(B|b)$.

1. Вычислить характеристическую функцию $h(u) = \mathbb{E}\, e^{in_\omega u}$ случайной величины n_ω, имеющей биномиальное распределение $p_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$ и найти с ее помощью среднее значение и дисперсию n_ω.

1. Пользуясь комбинаторным тождеством $C_{N+n}^n = C_{N+n-1}^n + C_{N+n-1}^{n-1}$, доказать по индукции, что характеристическая функция $h(u) = \mathbb{E}\, e^{in_\omega u}$ случайной величины n_ω, имеющей отрицательное биномиальное распределение $p_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$, $n = 0, 1, \ldots$, равна $h(u) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{iu}}\right)^N$.

1. Пользуясь характеристической функцией $h(u) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^{iu}}\right)^N$ случайной величины n_ω, имеющей отрицательное биномиальное распределение $p_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n}$, $n = 0, 1, \ldots$, найти среднее значение и дисперсию случайной величины n_ω.

1. Вычислить характеристическую функцию $h(u) = \mathbb{E}\, e^{in_\omega u}$ случайной величины n_ω, имеющей пуассоновское распределение $p(n) = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda}$ и найти с ее помощью среднее значение и дисперсию.

1. Вычислить характеристическую функцию $h(u) = \mathbb{E}\, e^{in_\omega u}$ случайной величины n_ω, имеющей гамма-распределение $p(n) = \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a) b^a}\, e^{-x/b}$ и найти с ее помощью среднее значение и дисперсию.

1. Вычислить характеристическую функцию $h(u) = \mathbb{E}\, e^{in_\omega u}$ случайной величины n_ω, имеющей распределение Коши $p(n) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x-\mu)^2}$.

1. В объеме V находится N невзаимодействующих частиц равномерно распределенных по всему объему. Пусть $V_0 \subset V$ – некоторая выделенная часть объема V и $n_\omega(V_0)$ – случайное число частиц, попавших в V_0 в некоторый момент времени. Найти среднее и дисперсию случайной величины $n_\omega(V_0)$. Каково наиболее вероятное значение $n_\omega(V_0)$?

1. Пусть $x, y \in [0,1]$ – независимые действительные случайные величины с плотностями распределения $p_x(r) \equiv 1$ и $p_y(r) \equiv 1$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $z = x + y$.

1. Пусть $x_\omega, y_\omega \in [0,1]$ – независимые действительные случайные величины с плотностями распределения $p_x(r) \equiv 1$ и $p_y(r) \equiv 1$. Вычислить распределение $P(x_\omega y_\omega < a)$ вероятности произведения $x_\omega \cdot y_\omega$. Чему равно наиболее вероятное значение $x_\omega \cdot y_\omega$?

1. Пусть $x \in [0,1]$ – случайная величина с плотностью распределения $p_x(r)$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $a\, e^x$.

1. Пусть $x \in [0,1]$ – случайная величина с плотностью распределения $p_x(r)$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $b \log x$.

1. Пусть $x, y \in R^n$ – независимые действительные случайные величины с плотностями распределения $p_x(r)$ и $p_y(r)$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $z = Ax + By$ для обратимых матриц A и B.

1. Пусть $x = \{\xi_n\}_1^N \in \mathbb{R}^N$, где ξ_n – независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением. Вычислить распределение случайной величины $r = |x|^2 \in \mathbb{R}_+$.

1. Показать, что корреляционная функция действительных случайных величин χ и ξ, связанных линейным соотношением $\chi = a + b\xi$, равна $\mathrm{Cor}\,(\xi, \chi) = b/|b|$.

1. Показать, что из существования абсолютного момента порядка n следует существование всех абсолютных моментов более низших порядков.

1. Вычислить все моменты стандартного нормального распределения.

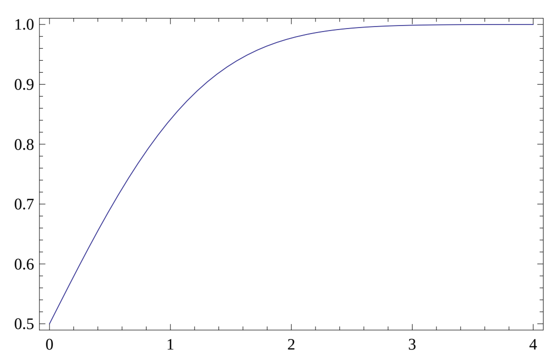
1. Вычислить все моменты экспоненциального распределения на $\mathbb{R}_+$.

---

2. Получить случайную величину, имеющую распределение $P(\xi < x) = e^{-e^{-ax}}$, $x \in \mathbb{R}$ методом преобразования случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$.

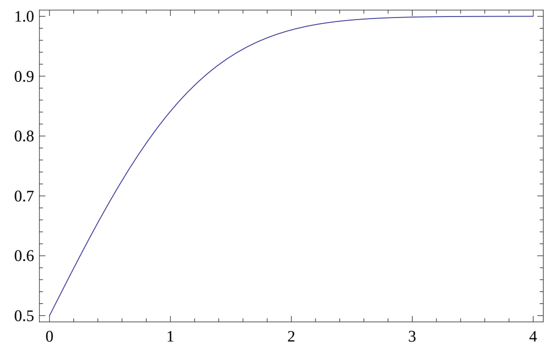
2. Получить случайную величину, имеющую распределение $P(\xi < x) = e^{-x^{-a}}$, $x \in \mathbb{R}_+$ методом преобразования случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[0,1]$.

2. Для массива из $N = 100$ экспериментальных точек определено выборочное среднее $\mu_N = 0.98$ и известна дисперсия оценок $\sigma = 0.2$. Какую абсолютную погрешность можно гарантировать для $\mu - \mu_N$ с вероятностью $P = 0.95$? Воспользуйтесь центральной предельной теоремой и графиком кумулятивного распределения стандартной нормально распределенной случайной величины.



2. Для массива из $N = 81$ экспериментальных точек определено выборочное среднее $\mu_N = 1$ и известна дисперсия оценок $\sigma = 0.3$. Какую погрешность для разности $\mu - \mu_N$

можно гарантировать с вероятностью $P = 0.95$? Воспользуйтесь центральной предельной теоремой и графиком кумулятивного распределения стандартной нормально распределенной случайной величины.



2. Показать, что функция распределения максимума из N независимых одинаково распределенных величин $\xi_N^* = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ имеет вид

$$P(\xi_N^* \geq x) = N \int_x^\infty p(\xi) F^{N-1}(\xi)\, d\xi = 1 - F(x)^N.$$

Функция $p(x)$, стоящая под знаком интеграла, является плотностью этого распределения.

2. Показать, что функция распределения минимума из N независимых одинаково распределенных величин $\xi_* = \min\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ имеет вид

$$P(\xi_* \leq x) = N \int_{-\infty}^x p(\xi) F_c^{N-1}(\xi)\, d\xi = 1 - F_c(x)^N.$$

Функция $p(x)$, стоящая под знаком интеграла, является плотностью кумулятивного распределения $F(x)$, а $F_c(x) = 1 - F(x)$.

2. Распределение $F(x) = P(\xi < x)$ называется *max-устойчивым* (или *M-устойчивым*), если для любого $n = 2, 3, \ldots$ существуют постоянные $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$, такие, что $F^n(a_n x + b_n) = F(x)$. Нужно показать, что распределение Гумбеля $P(\chi \leq x) = e^{-e^{-\alpha x}}$, $x \in \mathbb{R}$ является M-устойчивым.

2. Распределение $F(x) = P(\xi < x)$ называется *max-устойчивым* (или *M-устойчивым*), если для любого $n = 2, 3, \ldots$ существуют постоянные $a_n > 0$ и $b_n \in \mathbb{R}$, такие, что $F^n(a_n x + b_n) = F(x)$. Нужно показать, что распределение Фреше $P(\eta \leq x) = e^{-x^{-\alpha}}$, $x > 0$, является M-устойчивым.

2. Счетчик регистрирует случайный поток заряженных частиц, который характеризуется средним числом N частиц в единицу времени, а заряд равен $2e$. Предполагая, что случайное число частиц ν, регистрируемых в единицу, времени имеет пуассоновское распределение $p(\nu = n) = \frac{N^n}{n!}\, e^{-N}$, найти средний ток I и его дисперсию.

2. Счетчик регистрирует случайный поток заряженных частиц, который характеризуется средним числом N частиц в единицу времени, а заряд равен $2e$. Предполагая, что случайное число частиц ν, регистрируемых в единицу времени, имеет пуассоновское распределение $p(\nu = n) = \frac{N^n}{n!}\, e^{-N}$, найти средний заряд $Q(t)$, зарегистрированный за время t и его дисперсию.

2. Вероятность ориентации собственного магнитного момента молекул вдоль $(+)$ и против (-) направления внешнего магнитного поля равна

$$p_\pm(T, H) = \frac{e^{\pm \frac{\mu H}{kT}}}{2 \cosh \frac{\mu H}{kT}}.$$

Вычислить намагниченность M и ее среднее значение по распределению $p \pm (T, H)$ для газа, состоящего из N молекул. Для вычисления среднего воспользуйтесь распределением Бернулли.

2. Вероятность ориентации собственного магнитного момента молекул вдоль (+) и против (-) направления внешнего магнитного поля равна

$$p_{\pm}(T, H) = \frac{e^{\pm \frac{\mu H}{kT}}}{2 \cosh \frac{\mu H}{kT}}.$$

Вычислить намагниченность M и ее дисперсию по распределению $p \pm (T, H)$ для газа, состоящего из N молекул. Для вычисления дисперсии воспользуйтесь распределением Бернулли.

2. Вероятность ориентации собственного магнитного момента молекул вдоль (+) и против (-) направления внешнего магнитного поля равна

$$p_{\pm}(T, H) = \frac{e^{\pm \frac{\mu H}{kT}}}{2 \cosh \frac{\mu H}{kT}}.$$

Вычислить намагниченность M и ее среднее значение по распределению $p \pm (T, H)$ для газа, состоящего из N молекул. Для оценки среднего воспользуйтесь теоремой Муавра–Лапласа.

2. Вероятность ориентации собственного магнитного момента молекул вдоль (+) и против (-) направления внешнего магнитного поля равна

$$p_{\pm}(T, H) = \frac{e^{\pm \frac{\mu H}{kT}}}{2 \cosh \frac{\mu H}{kT}}.$$

Вычислить намагниченность M и ее дисперсию по распределению $p \pm (T, H)$ для газа, состоящего из N молекул. Для оценки дисперсии воспользуйтесь теоремой Муавра–Лапласа.

2. Пусть $x, y \in [-1, 1]$ – независимые действительные случайные величины с плотностями распределения $p_x(r) \equiv \frac{1}{2}$ и $p_y(r) \equiv \frac{1}{2}$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $z = \max\{x, y\}$.

2. Пусть $x, y \in [-1, 1]$ – независимые действительные случайные величины с плотностями распределения $p_x(r) \equiv \frac{1}{2}$ и $p_y(r) \equiv \frac{1}{2}$. Вычислить плотность вероятности случайной величины $z = \min\{x, y\}$.

2. Найти такое преобразование $T: \eta \to T\eta = \gamma$ случайной величины η равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, чтобы $P(\gamma < x) = e^{-x^{-ax}}$, $a > 0$, $x > 0$.

2. Найти такое преобразование $T: \eta \to T\eta = \gamma$ случайной величины η равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$, чтобы $P(\gamma < x) = e^{-e^{-ax}}$, $a > 0$, $x > 0$.

2. Для выборки размера N с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность отклонения выборочной оценки $\kappa_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} n_k$ параметра κ пуассоновского распределения $P(n) = \frac{\kappa^n}{n!}e^{-\kappa}$ не более, чем на 5% при $k = 2$.

---

3. Вычислить характеристическую функцию нормального распределения со средним a и дисперсией σ^2 и получить формулу плотности вероятности для суммы и среднего значения N независимых величин с такими распределениями.

3. Доказать, что выборочное среднее независимых случайных величин, имеющих распределение Коши $p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, также имеет распределение Коши.

3. Показать, что если функция $h(z)$ положительно определена в том смысле, что

$$\sum_{k,j} h(z_k - z_j) c_k \bar{c}_j \geq 0,$$

то $h(x-y)\,h(y-x) \leq h(0)^2$ и $|h(x)| \leq h(0)$ для любых x, y. В частности, если $h(0)=1$, то $|h(x)| \leq 1$.

3. Доказать, что если $h(u)$ – характеристические функция, то $h(u) = e^{\frac{1}{u}\int_0^u h(z)\,dz - 1}$ также является характеристической функцией.

3. Доказать, что если $h(u)$ – характеристические функция, то $h(u) = e^{c\,(h(u)-1)}$, $c > 0$ также является характеристической функцией.

3. Найти распределение случайной величины, имеющей характеристическую функцию $h_q(u) = (1 + q|u|^2)^{-1}$, $q > 0$.

3. Найти распределение, имеющее характеристическую функцию $h_c(u) = \cos^2 u$.

3. Найти распределение, имеющее характеристическую функцию $h_s(u) = \frac{\sin au}{u}$.

3. Найти распределение, имеющее характеристическую функцию $h(u) = \big(\det(I + 2iuC^T C)\big)^{-\frac{1}{2}}$, где I – единичная матрица, C – вещественная матрица того же размера.

3. Используя лемму Шура, показать, что если $h_\xi(u)$, $h_\chi(v)$, $h_\nu(z)$ – характеристические функции действительных случайных величин, то $h(u,v) = h_\xi(u) h_\chi(v) h_\nu(u-v)$ – характеристическая функция двумерной случайной величины.

3. Показать, что функция $h_q(u) = (1 + q|u|^2)^{-1}$, $q > 0$, положительно определена.

3. Показать, что сумма независимых случайных величин, имеющих безгранично делимые распределения, является безгранично делимой случайной величиной.

3. Показать, что сумма независимых случайных величин, имеющих устойчивые распределения, является случайной величиной с устойчивым распределением.

3. Вычислить предельное распределение $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (x_k - \lambda)$, $N \gg 1$, где x_n –независимые случайные величины, имеющие целочисленное пуассоновское распределение $P(x_k = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$.

3. Вычислить предельное распределение $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (x_n - \lambda)$, $N \gg 1$, где x_n –независимые случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение на R_+: $P(x_k > x) = e^{-x/\lambda}$.

3. Вычислить предельное распределение $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N (x_n - \lambda)$, $N \gg 1$, где x_n –независимые случайные величины, имеющие гамма-распределение на R_+ с плотностью $p(x) = \frac{x^a e^{-x/b}}{\Gamma(a) b^a}$.

3. Вычислить предельное распределение $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$, $N \gg 1$, где x_n –независимые случайные величины, имеющие распределение Коши на R с плотностью $p(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$.

---

4. Показать, что если абсолютные моменты $\{m_n\}_1^\infty$ д.с.в. x удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_n n^{-1} m_n < \infty,$$

то ее характеристическая функция аналитична в некоторой открытой окрестности вещественной оси.

4. Выразить моменты стандартного нормального распределения через гамма-функцию.

4. Вычислить все моменты экспоненциального распределения на $\mathbb{R}_+$.

4. Вычислить все моменты распределения Вигнера на отрезке $[-2,2]$: $p(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}$.

4. Используя формулу реконструкции распределений на отрезке $[0,1]$

$$P(\xi < x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n<[Nx]} C_N^n(-\Delta^{N-n})\mu_n$$

найти вероятностное распределение, соответствующее моментам $\mu_n = 3/(n+3)$, $x \in (0,1)$.

4. Используя формулу реконструкции распределений на отрезке $[0,1]$

$$P(\xi < x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n<[Nx]} C_N^n(-\Delta^{N-n})\mu_n$$

найти вероятностное распределение, соответствующее моментам $\mu_n = 2/(n+2)$, $x \in (0,1)$.

4. Используя формулу реконструкции распределений на отрезке $[0,1]$

$$P(\xi < x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n<[Nx]} C_N^n(-\Delta^{N-n})\mu_n$$

найти вероятностное распределение, соответствующее моментам $\mu_n = 1/(n+1)$, $x \in (0,1)$.

4. Используя формулу реконструкции распределений на отрезке $[0,1]$

$$P(\xi < x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n<[Nx]} C_N^n(-\Delta^{N-n})\mu_n$$

найти вероятностное распределение на отрезке $x \in [0,1]$, соответствующее моментам $\mu_n = p^n$, $p \in (0,1)$.

4. Используя формулу реконструкции распределений на отрезке $[0,1]$

$$P(\xi < x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n<[Nx]} C_N^n(-\Delta^{N-n})\mu_n$$

вывести формулу реконструкции распределения случайной величины, принимающей значения на произвольном отрезке $[a,b]$, по ее моментам $\{\widetilde{\mu}_n\}$. Рассмотреть частный случай $[-1,1]$.

4. Используя необходимое условие $(-\Delta)^m\mu_n \geq 0$, которому удовлетворяют моменты случайных величин на $[0,1]$, получить необходимое условие для моментов случайной величины, принимающей значения на произвольном отрезке $[a,b]$. Рассмотреть частный случай $[-1,1]$.

4. Плотность распределения вероятностей случайной величины, имеющей моменты $\{\mu_n\}_1^4$ аппроксимируется кривой Пирсона $p(x)$, зависящей от параметров a, b_0, b_1, b_2:

$$p'(x) = \frac{x-a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}\, p(x).$$

Построить систему линейных уравнений для параметров a, b_0, b_1, b_2.