Московский государственный университет
им.М. В. Ломоносова
Физический факультет

Задания

по статистической физике для студентов 4-го курса
физического факультета МГУ
(весенний семестр - теория неравновесных систем)

Автор-составитель -
И. А. Квасников

Москва
2009

УДК 531.19

Квасников И. А. Задания по статистической физике, теория неравновесных систем. - М.: Физический факультет МГУ, 2009 г, - 19 с.

В сборник включены задачи, которые входят в план семинарских занятий по общему курсу «Термодинамика и статистическая физика» для студентов 4-го курса физического факультета МГУ. Данный, второй выпуск содержит задания по теории неравновесных статистических систем (теория флуктуаций, броуновское движение, общие представления о теории случайных процессов, основы кинетической теории классических систем), предназначенные для весеннего семестра общего годового курса, существенно переработанные по отношению к [3].

§1. Биномиальное распределение

Задача 1.
Пространственно однородный идеальный классический газ N материальных точек занимает объем V. Найти абсолютную и относительную флуктуации числа частиц в некоторой части сосуда объема $V_1 \leq V$

(Решение см. [1], стр 46 или [2], гл. 1, задача 2.)

Задача 2.
В большом сосуде, содержащем пространственно однородный идеальный классический газ плотности $n = 1/v = N/V$ выделены (как бы «высвечены») две одинаковые сферические области радиуса R. Определить в пределе $N \to \infty, v = const$ зависимость от расстояния r между их центрами величину корреляции $\overline{\Delta N_1 \Delta N_2}$, где N_1 и N_2 - число частиц в каждой из этих сфер.

Решение: искомая корреляция определяется областью пересечения сфер, имеющей форму чечевицы с объемом
$V_1 = \frac{2}{3}\pi \left(R - \frac{r}{2}\right)^2 \left(2R + \frac{r}{2}\right)$, и решением задачи 1.
(см, также [2], гл. 1, задача 4)

Задача 3.
Для системы, представленной в задаче 1, определить вероятность обнаружить N_1 частиц в мысленно выделенной части сосуда V_1 (распределение Бернулли или биномиальное распределение) и рассмотреть среднее значение $\overline{N_1}$ и дисперсию $\overline{(\Delta N_1)^2}$. Получить асимптотическое выражение для этой вероятности в случаях
1) $N_1 \ll N, N \gg 1, v = const, \overline{N_1}$ конечно - случай распределения Пуассона;
2) $|N_1 - \overline{N_1}| \ll \overline{N_1}, 1 \ll N_1 \ll N, v = const, V_1/V = const$ - случай Лапласа (распределение Гаусса).

(Решение см. [1], стр 45-46 или [2], задача к гл. 1, §1)

Задача 4.
В поле зрения микроскопа наблюдатель видит 200 брауновских частиц. Более «точный» окуляр таков, что его поле зрения составляет 1/100 часть первого. Какова вероятность НЕ обнаружить в этом поле зрения ни одной частицы? Какова вероятность обнаружить ровно 1,2,3 и т.д. частиц?

Решение: реализуется случай Пуассона (см. задачу 3). Так как $\overline{N_1} = 200/100 = 2$, то

$$w_{N_1}(N) = \frac{2^{N_1}}{N_1!}e^{-2}; w_0 = e^{-2} \sim \frac{1}{9}; w_1 = w_2 = 2w_0, w_3 = \frac{4}{3}w_0 \text{ и т.д.}$$

(см. также [3], гл. 1, задача 1.)

Задача 5.
Полагая вылеты отдельных электронов из катода независимыми друг от друга, а вероятность отдельных вылетов за интервал времени $\tau \ll t$ пропорциональной этой

величине τ, показать, что дисперсия $\overline{(\Delta I)^2}$ тока эмиссии $I = ej$ за время t оказывается равной $\overline{(\Delta I)^2} = eI/t$

(Решение см. [1], стр 49 или [2], гл. 1, задача 6.)

Задача 6.

Система N не взаимодействующих друг с другом частиц со спином $1/2$, обладающих магнитным моментом $\beta = e\hbar/2mc$, находится в магнитном поле H, направленном в сторону оси z. Определить среднее значение и дисперсию намагничения $M = (N_+ - N_-)\beta = (2N_+ - N)\beta$, где N_+ и $N_- = N - N_+$ - числа частиц с спинами вверх и вниз, если вероятность обнаружить положительное направление магнитного момента частицы определяется больцмановским распределением $p = \exp\left\{\beta H/\theta\right\}/2\operatorname{ch}\beta H/\theta$.

(Решение см. [1], стр 48 или [2], гл. 1, задача 5.)

§2. Микроскопическая теория флуктуаций

Задача 7.

С помощью большого канонического распределения Гиббса определить дисперсию числа частиц в системе. Оценить относительную флуктуацию числа частиц в $1\,cm^3$ вырожденного идеального ферми-газа (газа электронов в металле при комнатной температуре), а также невырожденного классического идеального газа.

(Решение см. [1], стр 54-56 или [2], гл. 1, задача 12.)

Задача 8.

С помощью большого канонического распределения Гиббса определить дисперсию энергии системы, выразив ее через уравнения состояния системы. Оценить относительную флуктуацию плотности энергии вырожденного электронного газа, а также невырожденного идеального газа.

(Решение см. [1], стр 55-57 или [2], гл. 1, задача 13.)

Задача 9.

С помощью большого канонического распределения Гиббса определить корреляцию флуктуаций энергии и числа частиц в системе. Оценить эту величину для равновесного излучения и для идеального вырожденного ферми-газа.

(Решение см. [1], стр 65 или [2], гл. 1, задача 18.)

Задача 10.

Для вырожденного и невырожденного идеального ферми-газа оценить дисперсию химического потенциала в системе, выделенной воображаемыми стенками.

Решение:

Так как $\Delta\mu|_\theta = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial v}\right)_\theta v^2\Delta\mathfrak{n} = \left(-\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta v^3\Delta\mathfrak{n}$, то $\overline{(\Delta\mu)^2}|_\theta = \left(-\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta v^6\overline{(\Delta\mathfrak{n})^2} = \dfrac{1}{N}\theta v^2\left(-\dfrac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta.$

Учитывая, что $\overline{(\Delta\mathfrak{n})^2} = \overline{(\Delta N)^2}/V^2$ и что согласно решению задачи 7

$$\overline{(\Delta N)^2} = \begin{cases} \dfrac{3}{2}\dfrac{\theta}{\varepsilon_F}N & \text{в случае } \theta \ll \varepsilon_F, \\ N & \text{в случае } \theta \gg \varepsilon_F, \end{cases}$$

$$\text{получаем } \overline{(\Delta\mu)^2}|_\theta = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{\varepsilon_F\theta}{N} & \text{в случае } \theta \ll \varepsilon_F, \\ \dfrac{\theta^2}{N} & \text{в случае } \theta \gg \varepsilon_F. \end{cases}$$

Задача 11.

Получить общую формулу для дисперсии энтропии равновесной системы, выделенной воображаемыми стенками, и оценить эту величину для вырожденного и невырожденного идеального газа.

Решение:

Так как $\Delta s|_\theta = -\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_\theta v^2\Delta\mathfrak{n} = -\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v v^2\Delta\mathfrak{n}$, то учитывая, что $\overline{(\Delta\mathfrak{n})^2} = \overline{(\Delta N)^2}/V^2$ и записывая формулу для дисперсии числа частиц из задачи 7, получаем

$$\overline{(\Delta s)^2}|_\theta = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v^2 v^4\frac{\overline{(\Delta N)^2}}{V^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)_p\frac{\theta}{N}.$$

Так как для идеального нерелятивистского газа $p = \frac{2\varepsilon}{3v}$, то $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_v = \frac{2}{3}\frac{C_{VN}}{v}$,поэтому записывая выражение для $\overline{(\Delta N)^2}$ из задачи 10 в случаях $\theta \ll \varepsilon_F$ и $\theta \gg \varepsilon_F$, получаем $\overline{(\Delta s)^2}|_\theta = \frac{\pi}{6}\left(\frac{\theta}{\varepsilon_F}\right)^3\frac{1}{N}$ в случае $\theta \ll \varepsilon_F$ и $\overline{(\Delta s)^2}|_\theta = \frac{1}{N}$ в случае $\theta \gg \varepsilon_F$.

Задача 12.

Определить дисперсию и относительную флуктуацию чисел заполнения равновесного идеального бозе-газа (выше температуры его конденсации), ферми-газа и невырожденного классического идеального газа.

(Решение см. [1], стр.57, или [2], гл.1, задача 14)

Задача 13.

Считая электромагнитное излучение в полости объема V равновесным, определить флуктуации потока числа фотонов и потока выносимой ими энергии через маленькое отверстие в стенке.

(Решение см. [1], стр.65, или [2], гл.1, задача 19)

Задача 14.

Определить флуктуации потока числа частиц идеального классического газа, вылетающих в вакуум через маленькое отверстие в стенке сосуда. Газ в сосуде считать равновесным.

(Решение см. [1], стр.74, или [2], гл 1, задача 27)

Задача 15.
Зеркало баллистического гальванометра подвешено на тонкой нити на расстоянии 5 метров от шкалы. Какова должна быть величина коэффициента крутильной жесткости нити, чтобы амплитуда дрожания светового зайчика, связанного с тепловыми флуктуациями в системе имела порядок 0,1 см.?

(Решение см. [1], стр.74, или [2], гл 1, задача 26)

Задача 16.
Оценить мощность теплового шума, испускаемого электрическим сопротивлением в находящуюся в состоянии термодинамического равновесия с ним согласованную длинную линию. Получить формулу Найквиста для дисперсии ЭДС теплового шума сопротивления в полосе частот $\Delta\nu$.

(Решение см. [1], стр.75-76, или [2] гл.1, задача 28)

§3. Квазитермодинамическая теория флуктуаций.

Задача 17.
Исходя из основной формулы квазитермодинамической теории флуктуаций, получить для системы с постоянным числом частиц оценки для дисперсии температуры в случае фиксированного объема системы и в случае фиксированного давления в ней, а также оценки дисперсии объема и давления при фиксированной температуре системы.

(Решение см. [1], стр.78, или [2] гл.1, задача 30)

Задача 18.
Для системы с фиксированным числом частиц определить дисперсии температуры $\overline{(\Delta\theta)^2_N}$, объема $\overline{(\Delta V)^2_N}$, энтропии $\overline{(\Delta S)^2_N}$, а также их корреляции $\overline{(\Delta\theta\Delta V)_N}$, $\overline{(\Delta\theta\Delta S)_N}$,$\overline{(\Delta p\Delta V)_N}$.

(Решение см. [1], стр.79, или [2] гл.1, задача 31)

Задача 19.
Получить выражение для дисперсии теплоемкости C_{VN} системы, считая, что флуктуируют объем и температура при постоянном значении общего числа частиц. Оценить эту величину для газа электронов в металле при комнатной температуре и для твердого тела при температуре много меньшей дебаевской.

(Решение см. [1], стр.81, или [2] гл.1, задача 36)

Задача 20.
Для системы, выделенной воображаемыми стенками (объем системы фиксирован) определить дисперсии температуры и числа частиц, а также корреляции $\overline{(\Delta N\Delta\theta)_N}$, $\overline{(\Delta N\Delta\mu)_N}$, $\overline{(\Delta S\Delta\theta)_N}$.

(Решение см. [1], стр.79, или [2] гл.1, задача 32)

Задача 21.
Получить формулу для дисперсии свободной энергии в единице объема системы, считая, что флуктуируют число частиц и температура. Оценить относительную флуктуацию свободной энергии газа электронов в единице объема металла при комнатной температуре.

(Решение см. [1], стр.80, или [2] гл.1, задача 34)

Задача 22.
В изолированной системе, разделенной на две части неподвижной перегородкой, определить флуктуации температуры в каждой из частей, а также флуктуацию разности температур между ними.

(Решение см. [1], стр.83, или [2] гл.1, задача 38)

Задача 23.
Система, помещенная в термостат, разделена подвижной перегородкой на две части по N_1 и N_2 частиц в каждой. Определить флуктуации объемов этих частей и плотностей числа частиц в них.

(Решение см. [1], стр.84, или [2] гл.1, задача 39)

§4. Парная корреляционная функция в теории флуктуаций.

Задача 24.
Выразить через корреляционную функцию $F_2(R)$ корреляцию отклонений плотности числа частиц $\overline{\Delta\rho(\vec{r}_1)\Delta\rho(\vec{r}_1)}$ от их средних значений, где

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \qquad \Delta\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) - \overline{\rho}, \qquad \overline{\rho} = \frac{1}{v},$$

а также получить выражение для дисперсии числа частиц в некотором объеме V_0, мысленно выделяемом внутри системы.

(Решение см. [1], стр.72, или [2] гл.1, ззадача 24)

Задача 25.
Выразить через корреляционную функцию $F_2(R)$ среднее значение квадрата модуля $\overline{|\rho_k|^2}$ фурье компоненты ρ_k плотности числа частиц $\rho(\vec{r})$ (см. задачу 24). Найти также обратную формулу для $F_2(R)$ через $\overline{|\rho_k|^2}$

(Решение см.[1], стр. 73 или [2] , гл. 1, задача 25)

Задача 26.
Рассматривая систему с фиксированными значениями температуры и числа частиц, записать отклонение свободной энергии от ее равновесного значения через фурье-компоненты плотности числа частиц. Полагая, что флуктуационные отклонения свободной энергии обязаны не только отклонениям плотности числа частиц, но и ее

градиентам, получить, используя полученную в зад. 25 связь среднего значения $\overline{|\rho_k|^2}$ с парной корреляционной функцией $F_2(R)$, оценку ее поведения в области больших значений R.

(Решение см. [1], стр. 90-92 или [2], гл. 1, задача 44)

§5. Уравнение Ланжевена и корреляционные эффекты в броуновском движении.

Задача 27.

Для броуновской частицы размера $R \cong 10^{-4}$см, находящейся в равновесии со средой типа газа или жидкости, оценить среднее время между отдельными взаимодействиями частиц среды с броуновской частицей, среднее время взаимодействия частицы среды с броуновской частицей и время установления для броуновской частицы максвелловского распределения по скоростям.

(Решение см. [1], стр. 115 или [2], гл. 2, задача 1)

Задача 28.

Оценить среднее значение квадрата случайной силы, реально действующей на броуновскую частицу размера $R \sim 10^{-4}$см.

(Решение см. [1], стр. 116 или [2], гл. 2, задача 2)

Задача 29.

Определить в шкале времени $t \gg \tau$ (включая $dt \gg \tau$) корреляцию отклонений импульса броуновской частицы от среднего значения $\overline{\Delta p(t)\,\Delta p(t+\Delta t)}$. Сравнить ее поведение как функции Δt с корреляцией отклонений координаты броуновской частицы $\overline{\Delta x(t)\,\Delta x(t+\Delta t)}$.

(Решение см. [1], стр. 145 или [2], гл. 2, задача 28)

Задача 30.

Определить в шкале времени $t \gg \tau$ корреляцию отклонений импульса и отклонений координаты от своих средних значений $\overline{\Delta p\,\Delta x}$ и оценить это “соотношение неопределенностей” в случае $t \gg 1/\Gamma$.

(Решение см. [1], стр. 146 или [2], гл. 2, задача 29)

Задача 31.

Показать, что в грубой шкале времени $t \gg \tau$ (включая $dt \gg \tau$) корреляция смещения брауновской частицы $\Delta x(t)$ со случайным силовым воздействием на нее отсутствует.

Решение:

Так как

$$\Delta x(t) = x(t) - \overline{x} = \int_0^t dt' \, \frac{1 - e^{-\Gamma t'}}{\Gamma} \, F(t - t')$$

и

$$\overline{F(t-t')F(t)} = \varphi(t') = \begin{cases} \varphi/2 & \text{в случае} \quad |t'| \leqslant \tau, \\ 0 & \text{в случае} \quad |t'| > \tau, \end{cases}$$

то, учитывая, что $t' \, \Gamma < t \, \Gamma \ll 1$, получаем в низшем по τ порядке

$$\overline{\Delta x(t) F(t)} = \int_0^\tau dt' \, \frac{1 - e^{-\Gamma t'}}{\Gamma} \, \frac{1}{2} \, \varphi \cong \frac{\tau^2}{2} \frac{1}{m} \frac{\varphi}{2} = \frac{\gamma \, \theta}{2m} \, \tau,$$

что в шкале $t \gg \tau$ и означает отсутствие корреляции.

(см. также [2], гл. 2, задача 30)

Задача 32.

Показать, что предположение о независимости смещений брауновской частицы в последовательные интервалы времени достаточно для получения формулы Эйнштейна для среднего от квадрата смещения частицы, но недостаточно для обоснования диффузионного приближения в теории брауновского движения.

(Решение см. [1], стр. 117 или [2], гл. 2, задача 3)

Задача 33.

Представляя условную вероятность $\rho(x'|x, \Delta t)$ при $\Delta t \to 0$ в виде двух слагаемых, характеризующих вероятность брауновской частице за время Δt остаться в точке $x = x'$ и вероятность за это же время с некоторой скоростью перехода $W(x'|x)$ оказаться в точке $x \neq x'$, придать уравнению Смолуховского форму уравнения кинетического баланса.

(Решение см. [1], стр. 123-124 или [2], гл. 2, задача 8)

Задача 34.

В пространственно однородном случае вывести из уравнения кинетического баланса (см. задачу 33) уравнение Фоккера-Планка для свободного брауновского движения.

(Решение см. [1], стр. 124-125 или [2], гл. 2, задача 9)

Задача 35.

Найти решение одномерного уравнения Фоккера-Планка на полубесконечной прямой $x > 0$, считая, что внешнего силового поля нет, и что в точке $x = 0$ стоит непроницаемая стенка.

(Решение см. [1], стр. 126 или [2], гл. 2, задача 11)

Задача 36.

Найти решение одномерного уравнения Фоккера-Планка в поле сил тяжести $U =$

mgx на бесконечной прямой для броуновской частицы, которая в момент времени $t = 0$ находилась в точке $x = x_0$, определить средние значения $\overline{x}$ и $\overline{(\Delta x)^2}$. Полагая, что положение отсчитывается от реально существующего дна сосуда, сформулировать ограничения на временной интервал t, в течение которого полученное решение имеет физический смысл.

(Решение см. [1], стр. 127-128 или [2], гл. 2, задача 12)

Задача 37.

Определить на интервале $0 \leqslant x \leqslant L$ распределение плотности числа броуновских частиц $\rho(x)$ в стационарном потоке $j = const$, если $\rho(0) = \rho_0 > \rho(L)$ и на пути броуновских частиц имеется прямоугольный потенциальный барьер $U(x) = U_0$ в случае $a \leqslant x \leqslant a + \Delta a$ и $U(x) = 0$ вне интервала Δa.

(Решение см. [1], стр. 135-136 или [2], гл. 2, задача 19)

Задача 38.

Полагая, что среда, окружающая броуновскую частицу, ежесекундно растворяет с единицы ее поверхности α частиц (сама броуновская считается сферической, плотность числа частиц ее материала задана), определить, как меняется с течением времени величина $\overline{x^2}$. Коэффициент диффузии D_0 броуновских частиц в среде в момент $t = 0$ считается заданным.

Решение:
Число частиц, составляющих броуновскую частицу $N = \frac{4}{3}\pi R^3 n$ согласно условию изменяется по закону $\dot{N} = -4\pi R^2 \alpha$, откуда следует, что размер броуновской частицы уменьшается с течением времени по линейному закону

$$R(t) = R_0 - \frac{\alpha}{n} t = R_0 \left(1 - t/T\right), \; T = \alpha/nR_0.$$

(Далее см. [1], стр. 136 или [2], гл.2, задача 21)

§6. Спектральные разложения в теории случайных процессов.

Задача 39.

Показать, что корреляционная функция $F(t)$ стационарного процесса, описываемого действительной случайной переменной $\xi(t)$, имеет экстремум в точке $t = 0$, а соответствующая ей спектральная плотность $J(\omega)$ — в точке $\omega = 0$.

(Решение см. [1], стр. 201-202 или [2], гл. 3, задача 6)

Задача 40.

Определить, как изменится спектральная плотность $J(\omega)$ случайного стационарного процесса $\xi(t)$, если показание прибора, с помощью которого измеряется величина $\xi(t)$, представляет усредненное значение этой величины за интервал времени $(t-\tau,\, t)$. Используя полученный результат, объяснить тысячекратное расхождение теоретической оценки средней скорости броуновской частицы с измеряемой ее величиной по смещению броуновской частицы за время $\tau \sim 0,1$сек.

(Решение см. [1], стр. 199-201 или [2], гл. 3, задача 4)

Задача 41.

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ характеризуется корреляционной функцией $F(t) = \overline{\xi^2}\exp\{-\Gamma|t|\}$ $\left(\overline{\xi^2} = F(0)\right)$. Найти корреляционную функцию $G(t)$ и соответствующую ей спектральную плотность $I(t)$ для процесса $\zeta(t) = \dot{\xi}(t)$.

(Решение см. [1], стр. 203 или [2], гл. 3, задача 7)

Задача 42.

Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ характеризуется временной корреляционной функцией $F(t) = \overline{\xi^2}\exp\{-\Gamma|t|\}$, $\overline{\xi^2} = F(0)$. Определить корреляционную функцию $G(t)$ и соответствующую ей спектральную плотность $I(t)$ для стационарного процесса $\zeta(t)$, связанного с $\xi(t)$ дифференциальным соотношением $\dot{\zeta}(t) + \widetilde{\Gamma}\zeta(t) = \dot{\xi}(t)$ в случае $\widetilde{\Gamma} < \Gamma$.

Решение: Переходя к спектральному представлению, имеем

$$i\omega\zeta_\omega + \widetilde{\Gamma}\zeta_\omega = i\omega\xi_\omega \,,$$

откуда

$$\overline{\zeta_\omega\zeta^*_{\omega'}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 + \widetilde{\Gamma}^2}\,\overline{\xi_\omega\xi^*_{\omega'}}\,.$$

Учитывая явный вид спектральной плотности $J(\omega)$ гауссовского процесса $\xi(t)$, получаем для спектральной плотности процесса $\zeta(t)$

$$I(\omega) = J(0)\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 - \widetilde{\Gamma}^2}\left(\frac{\Gamma^2}{\omega^2 + \Gamma^2} - \frac{\widetilde{\Gamma}^2}{\omega^2 + \widetilde{\Gamma}^2}\right).$$

Соответствующая временная корреляционная функция имеет вид

$$G(t) = \overline{\zeta(t)\zeta^*(t)} = F(0)\frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \widetilde{\Gamma}^2}\left(e^{-\Gamma|t|} - \frac{\widetilde{\Gamma}}{\Gamma}\,e^{-\widetilde{\Gamma}|t|}\right).$$

(см. также [2], гл. 3, задача 8)

Задача 43.

Для стационарного процесса, описываемого действительной случайной переменной $\xi(t)$, определить временную корреляцию смещения $\eta(t)$ величины $\xi(t)$ с ускорением $\ddot{\eta}(t) = \dot{\xi}(t)$ (т.е. величины $\overline{\eta\ddot{\eta}}$).

(Решение см. [1], стр. 203-204 или [2], гл. 3, задача 9)

Задача 44.

Выразить корреляцию $\overline{\eta^*(t)\eta(t + \Delta t)}$ смещений случайной стационарной величины $\xi(t)$ через соответствующую ей спектральную плотность $J(\omega)$ и рассчитать эту корреляцию в случае, когда процесс $\xi(t)$ является марковским и гауссовским.

(Решение см. [1], стр. 211 или [2], гл. 3, задача 13)

Задача 45.

Методом спектральных разложений получить выражения для корреляционных функций смещений $F_x(t) = \overline{x(t)x(0)}$ и скоростей $F_v(t) = \overline{v(t)v(0)}$ брауновской частицы, двигающейся в вязкой среде в поле $U(x) = m\omega_0^2 x^2/2$ в случае, когда процесс блужданий уже стал стационарным.

(Решение см. [1], стр. 212-214 или [2], гл. 3, задача 15)

Задача 46.

Считая, что тепловой шум ЭДС сопротивления R определяется формулой Найквиста, определить временные корреляционные функции и спектральные плотности тепловых флуктуаций тока и напряжения на конденсаторе в электрическом колебательном контуре. Используя полученные результаты для спектральных плотностей и полагая, что средняя энергия индуктивности L в колебательном контуре равна $L\overline{I^2}/2 = \theta/2$ (или средняя энергия конденсатора равна $\overline{Q^2}/2C = \theta/2$) подтвердить формулу Найквиста для теплового шума ЭДС сопротивления R.

(Решение см. [1], стр. 217-219 или [2], гл. 3, задача 19)

Задача 47.

Определить среднее от квадрата заряда $Q(t)$, прошедшего за счет существования флуктуационных токов $I(t)$ через соединяющий обкладки конденсатора проводник с сопротивлением R за время t.

(Решение см. [1], стр. 216-217 или [2], гл. 3, задача 17)

Задача 48.

Оценить тепловой шум случайного силового воздействия на брауновскую частицу в полосе частот $\Delta\omega$, выбираемой произвольно внутри диапазона $(0, \Gamma_0)$.

(Решение см. [1], стр. 188 или [2], гл. 3, §8)

Задача 49.

С помощью обобщенной формулы Найквиста оценить в диапазоне частот $\Delta\omega$ дисперсию угловой скорости $\dot{\varphi}$ зеркальца баллистического гальванометра (см. задачу 15) с заданным моментом инерции I, если момент силы трения зеркальца о воздух пропорционален его угловой скорости, $M_{\text{тр}} = \gamma\dot{\varphi}$, где $\gamma = \Gamma I$.

Решение: Так как согласно теореме о равнораспределении $\overline{\dot{\varphi}^2} = \theta/I$, то в соответствии с формулой Найквиста

$$\overline{\xi^2}\Big|_{\Delta\omega} = \frac{2\overline{\xi^2}}{\Gamma}\frac{\Delta\omega}{\pi} \longmapsto \overline{\dot{\varphi}^2}\Big|_{\Delta\omega} = \frac{2\theta}{\gamma}\frac{\Delta\omega}{\pi}.$$

§7. Явления переноса и кинетические уравнения.

Задача 50.

Определить среднее значение модуля относительной скорости двух частиц равновесного идеального классического газа и оценить среднюю длину λ и среднее время τ

свободного пробега частиц разреженного классического газа, считая известным полное сечение σ рассеяния частиц друг на друге.

(Решение см. [1], стр 458-459, или [2] гл.5, задачи 6,7)

Задача 51.

С помощью решения стационарного кинетического уравнения с релаксационным членом рассчитать коэффициенты диффузии D и термодиффузии D_θ для классического разреженного газа в приближении $\tau = const$ и $\lambda = v\tau = const$.

(Решение см. [1], стр 472-473, или [2] гл.5, задача 15)

Задача 52.

С помощью решения стационарного кинетического уравнения с релаксационным членом рассчитать коэффициенты теплопроводности $\varkappa$ и диффузионного потока тепла $\varkappa_n$ для разреженного газа в приближении $\tau = const$ и $\lambda = v\tau = const$.

(Решение см. [1], стр 473, или [2] гл.5, задача 15)

Задача 53.

Определить коэффициент теплопроводности газа (в частности, идеального, где $p = n\theta$) давление которого всюду постоянно, $p(z) = const$.

(Решение см. [1], стр 475., или [2] гл.5, задача 16)

Задача 54.

Показать, что с точки зрения кинетического уравнения с релаксационным членом для разреженного классического газа между коэффициентами переноса имеет место следующее соотношение: $\frac{D\varkappa}{D_\theta \varkappa_n} = const$. Определить полученную константу в приближении $\tau = const$ и $\lambda = const$.

Решение следует из результатов двух предыдущих задач.

Задача 55.

С помощью кинетического уравнения с релаксационным членом в приближении $\tau = const$ и $\lambda = const$ рассчитать коэффициент внутреннего трения термически однородного классического газа.

(Решение см. [1], стр 475, или [2] гл.5, задача 17)

Задача 56.

Считая электронный газ в металле классическим газом, рассчитать, используя решение стационарного кинетического уравнения с релаксационным членом, проводимость σ электронного газа при условии $\theta = const$, теплопроводность $\varkappa$ электронного газа при условии отсутствия электрического тока, и в приближениях $\tau = const$ и $\lambda = v\tau = const$ определить константу $\frac{e^2\varkappa}{\sigma\theta} = const$ в законе Видемана-Франца.

(Решение см. [1], стр 476-477, или [2] гл.5, задача 18)

Задача 57.
Решить предыдущую задачу, считая электронный газ в металле вырожденным (случай $\theta \ll \varepsilon_F$). Получить формулы для σ и $\varkappa$, а также определить константу в законе Видемана-Франца.

(Решение см. [1], стр 478-479, или [2] гл.5, задача 19)

Задача 58.
Исходя из рассмотрения предыдущих задач, определить коэффициент Зеебека для термо-ЭДС электронного газа в вырожденном и невырожденном случаях.

(Решение см. [1], стр 481, или [2] гл.5, задача 20)

Задача 59.
Доказать Н-теорему Больцмана на основе кинетического уравнения Паули (уравнения кинетического баланса).

(Решение см. [1], стр 549, или [2] гл.5, задача 60)

Задача 60.
С помощью уравнения кинетического баланса установить принцип детального равновесия а) для адиабатической изолированной равновесной системы; б) для равновесной системы в термостате.

(Решение см. [1], стр 549-550, или [2] гл.5, задача 61)

Помимо части из приведенных выше задач
в экзаменационные билеты войдут следующие вопросы.

1. Пользуясь микроканоническим распределением, получить выражение для вероятности крупномасштабной флуктуации в равновесной изолированной системе.

2. Вывести общую формулу для вероятности заданной малой термодинамической флуктуации в равновесной неизолированной системе из формулы Эйнштейна, связывающей вероятность малой термодинамичесой флуктуации с изменением энтропии.

3. Получить выражение для вероятности крупномасштабных флуктуационных отклонений в равновесной системе, выделенной нежесткими теплопроводящими стенками из термостата ($N = \mathrm{const}$, остальные параметры флуктуируют), и установить его связь с условиями устойчивости этой системы.

4. Получить выражение для вероятности крупномасштабных флуктуационных отклонений в равновесной системе фиксированного объема, выделенной воображаемыми стенками из термостата ($V = \mathrm{const}$, остальные параметры флуктуируют), и установить его связь с условиями устойчивости этой системы.

5. Показать, что для системы, выделенной нежесткими теплопроводящими стенками из термостата ($N = \mathrm{const}$, остальные параметры флуктуируют), флуктуационные отклонения температуры и объема от их равновесных значений независимы.

6. Показать, что для системы фиксированного объема, выделенной воображаемыми стенками из термостата ($V = \mathrm{const}$, остальные параметры флуктуируют), флуктуационные отклонения температуры и общего числа частиц от их равновесных значений независимы.

7. Записать уравнение Ланжевена для импульса брауновской частицы, охарактеризовать корреляционную функцию случайного силового воздействия на частицу.

8. Дать физическую интерпретацию уравнения Фоккера–Планка в трехмерном пространстве и дополнительных условий к нему.

9. Получить уравнение Смолуховского для общего марковского процесса. При каких условиях это нелинейное уравнение описывает брауновское движение и более общие диффузионные процессы?

10. Пользуясь спектральным представлением стационарного случайного процесса, получить спектральную форму условия стационарности и указать связь между корреляционной функцией и спектральной плотностью процесса.

11. Определение стационарного марковского гауссовского случайного процесса и математические выражения для его свойств.

12. Получить формулу Найквиста для спектральной плотности теплового шума сопротивления R при температуре θ в полосе частот $\Delta\nu$.

13. Из уравнений Гамильтона для эволюции микроскопического состояния классической системы многих частиц вывести уравнение Лиувилля для плотности вероятности в фазовом пространстве.

14. Кинетические функции распределения. Одночастичная функция распределения и связанные с ней физические характеристики классической неравновесной системы. Ограниченность описания кинетики системы с помощью только этой функции.

15. Из уравнения Лиувилля получить общую форму кинетического уравнения для одночастичной кинетической функции распределения. Что такое интеграл столкновений и каким общим требованиям он должен удовлетворять?

16. Записать кинетическое уравнение с релаксационным членом вместо интеграла столкновений и получить его стационарное решение в первом порядке по параметру τ.

17. Сформулировать концепцию самосогласованного поля в системах с дальнодействием. Получить из первого уравнения цепочки Боголюбова кинетическое уравнение Власова как нулевое приближение по параметру дальнодействия в классической плазме.

18. Линеаризуя уравнение Власова для классического электронного газа в компенсирующем поле положительно заряженных тяжелых ионов, получить систему уравнений для эволюции слабонеравновесного состояния.

19. Записать кинетическое уравнение Больцмана в пространственно однородном приближении. Охарактеризовать физические ограничения, необходимые для построения интеграла столкновений в системах типа газа с короткодействием (отсутствие тройных и массовый характер парных столкновений, подход Боголюбова к описанию кинетической эволюции системы).

20. Показать, что локальное распределение Максвелла при подстановке в качестве одночастичной функции распределения в интеграл столкновений Больцмана обращает его в нуль. Каков физический смысл соответствующего значения H-функции?

21. Выразить дисперсию числа частиц в макроскопическом объеме через парную корреляционную функцию. Установить аддитивность дисперсии.

22. Для пространственно однородного классического газа вычислить среднее значение и относительную флуктуацию числа частиц N_1 в некоторой части сосуда объема V_1. Показать, что в пределе $N \to \infty$, $V \to \infty$, $V/N = v = \text{const}$, $V_1 = \text{const}$ это число подчиняется закону Пуассона.

23. Для пространственно однородного классического газа вычислить среднее значение и относительную флуктуацию числа частиц N_1 в некоторой части сосуда объема V_1. Показать, что отклонение $\Delta N_1 = N_1 - \overline{N_1}$ от среднего значения имеет порядок $\sqrt{N}$ и что в пределе $N \to \infty$, $V, V_1 \to \infty$, $V_1/V = \text{const}$ величина $\Delta N_1/\sqrt{N}$ подчиняется нормальному закону.

24. С помощью большого канонического распределения Гиббса определить дисперсию энергии системы, выразив ее через уравнения состояния системы. Рассмотреть частные случаи вырожденного ферми-газа и классического идеального газа.

25. Пользуясь уравнением Ланжевена для импульса брауновской частицы, получить зависимость от времени дисперсий ее импульса и координаты в шкале времени, грубой по сравнению со временем автокорреляции случайной силы.

26. Пользуясь уравнением Ланжевена, получить корреляционную функцию $\overline{\Delta p(t)\,\Delta p(t + \Delta t)}$ отклонения ее импульса от среднего значения в шкале времени, грубой по сравнению со временем автокорреляции случайной силы.

27. Пользуясь уравнением Ланжевена, получить корреляционную функцию $\overline{\Delta x(t)\,\Delta x(t + \Delta t)}$ отклонения ее координаты от среднего значения на временах, больших по сравнению со временем забывания начальных условий.

28. Вывести одномерное уравнение Фоккера–Планка для марковского процесса диффузионного типа из уравнения Смолуховского.

29. Получить дисперсионное уравнение для продольных колебаний электростатического поля и плотности в классической плазме, связывающее плазменную частоту с величиной волнового вектора. Показать, как может быть устранена обратимость

во времени уравнения Власова («ε-процедура»).

30. Вывести цепочку уравнений Боголюбова для кинетических функций распределения из уравнения Лиувилля.

31. С помощью кинетического уравнения с релаксационным членом в приближении $\tau = \text{const}$ оценить коэффициент внутреннего трения термически однородного классического газа.

32. Дать качественный вывод кинетического уравнения Больцмана для пространственно однородного газа с короткодействием (без использования цепочки Боголюбова).

33. Доказать лемму Больцмана и получить из нее H-теорему Больцмана. Какова причина появления необратимости во времени полученного результата?

34. Линеаризуя интеграл столкновений Больцмана, показать, что характерное время релаксации к состоянию равновесия определяется наименьшим положительным собственным значением соответствующего оператора.

Эти факты должны знать все

Каждый студент, сдающий экзамен по термодинамике и статистической физике в весеннюю сессию, должен быть в состоянии по памяти, без предварительной подготовки ответить на следующие вопросы. Примерные ответы приведены в рамках (обозначения соответствуют обозначениям в учебнике [2]). На экзамене для правильного ответа необходимо объяснить смысл всех использованных в формуле обозначений.

1. Связь вероятности флуктуационного отклонения от равновесия в изолированной системе с изменением ее энтропии (формула Эйнштейна).

$$\boxed{w_\Delta \sim e^{\Delta S}}$$

2. Связь вероятности флуктуационного отклонения от равновесия в системе, помещенной в термостат и находящейся: (а) при фиксированном объеме; (б) под поршнем; (в) в воображаемых стенках с изменением энтропии и соответствующих термодинамических потенциалов.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{(а) } w_\Delta \sim e^{\Delta S - \Delta\mathcal{E}/\theta_T} = e^{-\Delta\mathcal{F}/\theta_T}; \quad \text{(б) } w_\Delta \sim e^{\Delta S - (\Delta\mathcal{E} + p\Delta V)/\theta_T} = e^{-\Delta G/\theta_T};\\ \text{(в) } w_\Delta \sim e^{\Delta S - (\Delta\mathcal{E} - \mu_T\Delta N)/\theta_T} = e^{-\Delta\Omega/\theta_T}\end{gathered}}$$

3. Формула, выражающая вероятность заданной малой термодинамической флуктуации в равновесной неизолированной системе.

$$\boxed{w_\Delta \sim \exp\left(\frac{\Delta p\Delta V - \Delta\theta\Delta S - \Delta\mu\Delta N}{2\theta}\right)}$$

4. Уравнение Ланжевена для импульса брауновской частицы. Каковы статистические свойства случайной силы в его правой части?

$$\boxed{\begin{gathered}\dot{p} + \Gamma p = F(t);\\ \overline{F(t)} \equiv 0; \quad \overline{F(t_1)F(t_2)} = \varphi(t_1 - t_2),\\ \text{где } \varphi(t) \gg 1 \text{ при } |t| < \tau,\ \varphi(t) = 0 \text{ при } |t| > \tau\\ \text{и рассматривается грубый масштаб времени } dt \gg \tau\end{gathered}}$$

5. Формулы для дисперсии импульса брауновской частицы при $\Gamma t \ll 1$ и дисперсии ее координаты (формула Эйнштейна) при $\Gamma t \gg 1$.

$$\boxed{\overline{(\Delta p(t))^2} \cong 2\Gamma m\theta t \quad (\Gamma t \ll 1), \qquad \overline{(\Delta x(t))^2} \cong \frac{2\theta}{m\Gamma}t \quad (\Gamma t \gg 1)}$$

6. Что такое марковский случайный процесс?

> Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если при любом $n \geqslant 3$ условная вероятность P_n обнаружить частицу в интервале $(\xi_n, \xi_n + d\xi_n)$ в момент времени t_n удовлетворяет соотношению
> $$P_n(\,\xi_1, t_1; \ldots; \xi_{n-1}, t_{n-1} \mid \xi_n, t_n\,) = P_2(\,\xi_{n-1}, t_{n-1} \mid \xi_n, t_n\,)$$

7. Уравнение Смолуховского для марковского случайного процесса.

$$\boxed{P_2(\,\xi_1, t_1 \mid \xi_3, t_3\,) = \int P_2(\,\xi_1, t_1 \mid \xi_2, t_2\,) P_2(\,\xi_2, t_2 \mid \xi_3, t_3\,)\, d\xi_2}$$

8. Уравнение Фоккера–Планка для диффузионного случайного процесса в трехмерном случае.

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} = \operatorname{div}\left(D\,\nabla\rho + \frac{1}{\gamma}\rho\,\nabla U\right)}$$

9. Решение уравнения Фоккера–Планка для диффузии на бесконечной прямой при отсутствии внешнего потенциала.

$$\boxed{\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(\theta/\gamma)t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\theta/\gamma)t}\right) \text{ или } \rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)}$$

10. Что такое гауссов случайный процесс?

Случайный процесс $\xi(t)$ называется гауссовым, если все его плотности вероятности $w_n(\xi_1, t_1; \ldots; \xi_n, t_n)$ являются гауссовыми

11. Корреляционная функция стационарного марковского гауссова случайного процесса (процесса Орнштейна–Уленбека).

$$\boxed{F(t) = F(0)\, e^{-\Gamma|t|}}$$

12. Что такое стационарный случайный процесс?

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным, если все его плотности вероятности однородны во времени: $w_n(\xi_1, t_1 + t_0; \ldots; \xi_n, t_n + t_0) = w_n(\xi_1, t_1; \ldots; \xi_n, t_n)$ для любого t_0

13. Спектральное условие стационарности случайного процесса.

$$\boxed{\overline{\xi_\omega \xi^*_{\omega'}} = J(\omega)\delta(\omega - \omega')}$$

14. Формула Найквиста для спектральной плотности теплового шума сопротивления R при температуре θ в полосе частот $\Delta\nu$.

$$\boxed{\overline{\mathcal{E}^2}\Big|_{\Delta\omega} = 4R\theta\Delta\nu}$$

15. Уравнение Лиувилля для классической системы N частиц.

$$\boxed{\frac{\partial w_N}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{r}_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}_i} - \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{r}_i}\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}_i}\right) = \{H, w\}_{\text{кл}}}$$

16. Определение s-частичной кинетической функции распределения.

$$\boxed{F_s(t, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_s, \boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_s) = V^s \int w_N \frac{dq\, dp}{d\boldsymbol{r}_1 \ldots d\boldsymbol{r}_s\, d\boldsymbol{p}_1 \ldots d\boldsymbol{p}_s}}$$

17. Выражения через нестационарную одночастичную кинетическую функцию распределения $F_1(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ для локальной концентрации $n(t, \boldsymbol{r})$ и плотности электрического тока $\boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{r})$, если каждая частица имеет заряд q.

$$\boxed{n(t, \boldsymbol{r}) = \frac{N}{V} \int F_1(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{j}(t, \boldsymbol{r}) = \frac{N}{V} \int \frac{q}{m} \boldsymbol{p}\, F_1(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})\, d\boldsymbol{p}}$$

18. Общая структура кинетического уравнения для одночастичной кинетической функции распределения и интеграл столкновений.

$$\boxed{\frac{\partial F_1(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})}{\partial t} + \frac{1}{m} \boldsymbol{p} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{p}} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{\text{ст}}}$$

19. Первое уравнение цепочки Боголюбова, связывающее одночастичную и двухчастичную кинетические функции распределения.

$$\boxed{\frac{\partial F_1(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})}{\partial t} + \frac{1}{m} \boldsymbol{p} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{p}} = \frac{1}{v} \int \frac{\partial \Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial F_2(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}')}{\partial \boldsymbol{p}}\, d\boldsymbol{r}'\, d\boldsymbol{p}'}$$

20. Кинетическое уравнение с релаксационным членом вместо интеграла столкновений.

$$\boxed{\frac{\partial F_1(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})}{\partial t} + \frac{1}{m} \boldsymbol{p} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{F_1 - F_1^{(0)}}{\tau}}$$

21. Кинетическое уравнение Власова в однокомпонентной классической плазме.

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{\partial F_1(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})}{\partial t} + \frac{1}{m} \boldsymbol{p} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \big(U + \widetilde{U}(t, \boldsymbol{r}) \big)}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{p}} = 0, \\ \widetilde{U}(t, \boldsymbol{r}) = \int n(t, \boldsymbol{r}') \Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\, d\boldsymbol{r}' = \frac{N}{V} \int F_1(t, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}') \Phi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\, d\boldsymbol{r}' d\boldsymbol{p}' \end{gathered}}$$

22. Кинетическое уравнение Больцмана для пространственно однородного случая.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v} \int (f' f_1' - f f_1) u\, d\omega\, d\boldsymbol{p}_1,$$

где $u = |\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}|/m$, $d\omega = a\, da\, d\varphi$, $f = F_1(t, \boldsymbol{p})$, f', f_1, f_1' получаются из f заменой $\boldsymbol{p}$ на $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_1'$ соответственно, а $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}_1'$ выражаются через $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_1$ и параметры рассеяния a, φ с помощью формул механики

23. Функция, обращающая в нуль интеграл столкновений Больцмана.

$$\boxed{\mathcal{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) = \exp(\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{p} + \gamma |\boldsymbol{p}|^2) = n(\boldsymbol{r}) \frac{\text{const}}{(2\pi m \theta(\boldsymbol{r}))^{3/2}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0(\boldsymbol{r})|^2}{2m\theta(\boldsymbol{r})} \right)}$$

24. H-функция и H-теорема Больцмана.

$$\boxed{\mathcal{H}(t) = \int \mathcal{F}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) \, \ln \mathcal{F}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}) \, \frac{d\boldsymbol{r} \, d\boldsymbol{p}}{(2\pi\hbar)^3}; \quad \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} \leqslant 0}$$

В последних двух вопросах $\mathcal{F}$ — обезразмеренная одночастичная функция распределения.

Список литературы

[1] И.А.Квасников, «Термодинамика и статистическая физика», теория неравновесных систем. Изд. МГУ, 1987 г. 560 с.

[2] И.А.Квасников, «Термодинамика и статистическая физика», том III, теория неравновесных систем. Изд. УРСС, М., 2002г., 448 с.

[3] И.А.Квасников, Д.В.Кукин, Задачи по курсу термодинамики и статистической физики, часть II. Изд. МГУ, 1981 г., 47 с.