Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Задания
по термодинамике и статистической физике для студентов 4-го курса физического факультета МГУ (осенний семестр - теория равновесных систем)

Автор-составитель -
И. А. Квасников

Москва
2008

УДК 531.19

Квасников И. А. Задания по термодинамике и статистической физике, теория равновесных систем. - М.: Физический факультет МГУ, 2008 г, - 38 с.

В сборник включены задачи, которые входят в план семинарских занятий по общему курсу термодинамики и статистической физике для студентов 4-го курса физического факультета МГУ. Данный выпуск содержит задания по теории равновесных систем, предназначенные для осеннего семестра общего годового курса, существенно переработанные по отношению к [4].

Предисловие

Система единых заданий по курсу «Термодинамика и статистическая физика», раздаваемых студентам и прорабатываемых на семинарских занятиях и отчасти самостоятельно, существует на физическом факультете с 1964 года. Идея вынесения части материала программы с лекций на семинары оказалась весьма эффективной не столько вследствие того, что какая-то доля чисто прикладных и частных (но обязательных) вопросов была с лекционного курса снята, сколько потому, что этот материал стимулировал сами семинарские занятия, превращая их в определенном смысле в самостоятельный, не дублирующий лекции элемент учебного процесса.

Выход в свет 2-го издания 1-го и 2-го тома тома учебного пособия И. А. Квасникова [2]-[3], которые вместе представляют существенно улучшенный вариант пособия 1991 года [1], значительно облегчают работу по рассмотрению представленных в заданиях задач: в упомянутых изданиях имеется достаточно материала, чтобы не только найти подробное решение этих задач, но и прокомментировать и при необходимости проиллюстрировать полученные решения. Это позволило в данном пособии ограничиться в основном формулировками поставленных задач и ссылками на соответствующий материал в изданиях [1-4].

Раздел 1. Задачи по макроскопической термодинамике

§1. Работа термодинамической системы в квазистатическом приближении

Задача 1.
Используя формулу для работы δW газа при его квазистатическом расширении на величину $\delta V(\vec{r})$, рассчитать работу ΔW идеального газа, находящегося в вертикальном цилиндрическом сосуде в поле силы тяжести, по поднятию поршня с высоты h_1 до h_2 в случае, если этот процесс является изотермическим.

(см. решение [2], стр. 155)

Задача 2.
Вывести выражения для работы единицы объема изотропного диэлектрика, связанной с дифференциально малым изменением электростатического поля, считая внешним параметром индукцию D, поляризацию P и напряженность электростатического поля E, и установить физический смысл этих трех выражений.

(см. решение [2], стр. 157)

Задача 3.
Вывести выражения для работы единицы объема изотропного магнетика, полагая внешним параметром индукцию B, намагниченность M и напряженность магнитного поля H, и установить физический смысл этих трех различных выражений.

(см. решение [2], стр. 158-159)

Задача 4.
Оценить время установления равновесных значений давления, равновесных концентраций компонент в смеси газов типа воздуха и температуры, если газ находится при нормальных условиях в сосуде объема 1 литр.

(см. обсуждение этого вопроса [2], стр. 152-153)

§2. Первое начало термодинамики

Задача 5.
Показать, что если три величины x, y, z связаны соотношением $f(x, y, z) = 0$, то имеет место формула:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1,$$

позволяющая выразить одну из частных производных через две другие.

(решение см. [2], стр. 145, а также [1], стр. 160)

Задача 6.
Пологая, что наряду с уравнениями состояния $p = p(\theta, v)$ заданы две калорические удельные характеристики c_V и c_P, записать для системы $N = const$ дифференциальную форму I начала термодинамики для δQ и установить связь между изотермическим и адиабатическим модулями сжимаемости.

(см. [1] стр. 183, а также [2] стр. 162)

Задача 7.
Исследовать возможность применения формул квазистатической термодинамики при определении величины скорости распространения акустического возмущения в воздухе, полагая, что время образования локальных термодинамических характеристик по порядку величины близко к времени свободного пробега молекул газа $\tau \sim 10^{-10}$ сек.

(см. решение и обсуждение [2], стр. 154-155)

Задача 8.
Для газовой системы с заданными величинами теплоемкостей c_V и c_P на основе I начала термодинамики получить дифференциальное уравнение политропического процесса (процесса с постоянной удельной теплоемкостью c) и проинтегрировать его в случае идеального газа $pv = \theta, c_V = const, c_P = c_V + 1 = const$. Обсудить частные случаи, когда теплоемкость c принимает значения $0, c_V, c_P, \infty$.

(см. [2], стр. 162-163 или [1], стр. 184-185)

Задача 9.
Рассчитать удельную теплоемкость c_α идеального газа для процесса, начинающегося из точки (v, p) в направлении угла α к оси v, как функцию

угла α, и определить область значений углов α, при которых теплоемкость c_α отрицательна.

(см. [2], стр. 163)

Задача 10.

Определить в квазистатически-гидростатическом приближении высотный градиент температуры в безветренном слое атмосферы земли ниже кромки облаков, полагая поле силы тяжести однородным, воздух идеальным газом с пренебрежимо малым коэффициентом теплопроводности (адиабатическая модель атмосферы). Получить зависимость температуры, давления и плотности для этой модели атмосферы и оценить ее толщину.

(решения и обсуждение см. [2], стр. 199-201 или [1], стр. 231-233)

Задача 11.

В квазистатически-гидростатическом приближении найти распределение по высоте плотности и давления в атмосфере, находящейся в однородном поле силы тяжести земли и образованной идеальным газом с очень большим значением коэффициента теплопроводности (изотермическая модель атмосферы).

(см. [2], стр. 200 или [1], стр. 233)

Задача 12.

Показать, что в интервале температур от 0^oC до $+4^oC$ вода при адиабатическом сжатии охлаждается (аномальный эффект), а при температуре $+4^oC$ теплоемкости c_V и c_P совпадают.

(см. [2], стр. 163-164 или [1], стр. 186-187)

Задача 13.

Для политропического процесса с идеальным газом в качестве рабочего тела определить конечные величины теплового эффекта ΔQ, изменения внутренней энергии $\Delta\mathcal{E}$ и произведенной работы ΔW и рассчитать на основе этих формул кпд тепловой машины, работающей по циклу Отто (две адиабаты, замыкаемые двумя изохорами) и цикла Дизеля (изобара вместо левой изохоры).

(см. [2], стр. 163 и 177-178 или [1], стр. 185 и 198-201)

Задача 14.
Рассмотреть простейшую модель теплового насоса и определить удельную холодопроизводительность компрессионной холодильной установки, работающей на испарении фреона, если температура внутри камеры θ_1 и температура окружающей среды θ_2 заданы. Определить также коэффициент теплопроизводства насоса, т.е. во сколько раз тепловой насос, работающий в качестве отопителя помещения, эффективнее нагревателя типа электрического камина или электрической батареи.

(см. решение и обсуждение [2], стр. 181 или [1], стр. 204)

Задача 15.
Записать в терминах удельных величин закон сохранения энергии для стационарного течения идеального газа по каналу произвольного сечения, помещенного в однородное поле силы тяжести, и, пологая стенки канала адиабатическими, вывести уравнение Бернулли.

(решение см. [2], стр.182-183 или [1], стр. 206-208)

§3. II Начало термодинамики

Задача 16.
Рассчитать удельное значения внутренней энергии, энтропии и разности теплоемкостей $c_P - c_V$ для газа Ван-дер-Ваальса (в случае $a = 0$ и $b = 0$ - идеального газа) с постоянной теплоемкостью c_V.

(решение см. [2], стр 165-166 или [1], стр. 188-189)

Задача 17.
Показать, что удельная теплоемкость c_V для газа Ван-дер-Ваальса (и идеального газа как его частного случая) может зависеть только от температуры.

(решение см. [2], стр. 160)

Задача 18.
Показать, что приближение $c_V = const$ и $c_p = const$ может соответствовать только идеальному газу с поправкой на собственный объем $p(v - b) = \theta$.

(решение см. [2], стр. 161)

Задача 19.

Определить вид уравнения состояния идеального парамагнетика внутренняя энергия которого $\mathcal{E}_M$ не зависит от M, а зависит только от температуры.

(решение см. [2], стр. 170-171)

Задача 20.

Определить вид уравнения состояния изотропного неидеального магнетика, если известно, что его теплоемкость C_M не зависит от M и что $M = \chi H$.

Решение: согласно $(*')$ $\dfrac{\partial C_M}{\partial M} = -\theta \dfrac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} = 0$, откуда следует линейная зависимость $H(\theta, M)$ от температуры, что в сочетании с $H = M/\chi$ дает $H = const(\theta \mp \theta_0)M$ и закон Кюри-Вейсса для χ.

Задача 21.

Определить зависимость теплоемкостей C_H и C_M от температуры и напряженности магнитного поля H для парамагнетиков Кюри и Кюри-Вейсса, считая теплоемкость кристаллической решетки $C(\theta)$ заданной.

(решение см. [2], стр. 165)

Задача 22.

Оценить эффект охлаждения парамагнетика Кюри-Вейсса при адиабатическом выключении магнитного поля, считая, что теплоемкость $C_M = a\theta^3, a = const$.

Решение: согласно зад. 5 и следствию II начала $(*)$ имеем

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial H}\right)_S = -\left(\frac{\partial \theta}{\partial S}\right)_H \left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_\theta = -\frac{\theta}{C_H}\left(\frac{\partial M}{\partial \theta}\right)_H,$$

куда надо подставить закон Кюри-Вейсса для M и C_H из зад. 12. В случае $C_H - C_M \ll a\theta^3$ и $\theta_0 \ll \theta$ получаем в частности $\left(\dfrac{\partial \theta}{\partial H}\right)_S \cong \dfrac{bH}{a\theta^4}$.

Задача 23.

Парамагнетик Кюри-Вейсса $M = bH/(\theta - \theta_0), C_M = a\theta^3$ совершает следующий процесс: магнитное поле включается от нуля до H изотермически при температуре $\theta_1 > \theta_0$, а затем выключается до нуля адиабатически.

Рассчитать тепловой эффект этого процесса и найти конечную температуру магнетика θ_2.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 171-173 и [1], стр. 197-198)

Задача 24.

Определить кпд машины, работающей по циклу Карно между изотермами θ_1 и θ_2 и показать, что кпд любого цикла, укладывающегося в интервал температур $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_1$, не превышает кпд соответствующего цикла Карно.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 192-193 и [1], стр. 221-222)

Задача 25.

С помощью теоремы Карно для бесконечно узкого цикла $\theta_1 - \theta_2 = d\theta$ и I начала термодинамики получить для газа формулу (*), связывающую величину $(\partial\mathcal{E}/\partial V)_\theta$ с уравнением состояния $p = p(\theta, V)$ (число частиц N считать фиксированным).

(решение см. [2], стр. 189-190 или [1], стр. 217-218)

Задача 26.

Для равновесного электромагнитного излучения получить с помощью теоремы Карно и I начала термодинамики закон Стеофана-Больцмана.

(решение см. [2], стр. 81 или [1], стр. 219)

Задача 27.

Рассчитать изменение энтропии при процессах:
а) смешивания двух порций воды с разными температурами,
б) опускания нагретого тела в холодную воду,
в) смешивания двух порций идеального газа,
г) смешивания двух порций различных идеальных газов.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 193-196 или [1], стр. 223-227)

§4. Термодинамические потенциалы и их использование

Задача 28.
Определить термодинамические потенциалы в переменных (θ, V, a, μ) и (θ, p, a, μ) и написать соответствующие дифференциальные уравнения для их изменения.

Задача 29.
В каких переменных так называемая связанная энергия $B = \mathcal{E} - \mathcal{F} = \theta S$ является термодинамическим потенциалом?

Задача 30.
Показать, что $\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_\theta - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\theta \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_S = 1.$

Решение: задачи предложена с целью ознакомления с методом якобианов, довольно часто используемом в термодинамических расчетах. Заметим, что если в якобиане

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_y & \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_x \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)_y & \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)_x \end{vmatrix}$$

положить $v = y$, то, учитывая, что $(\partial y/\partial x)_y = 0$, получим

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y .$$

Такое представление частной производной бывает очень удобным. Действительно, обращая внимание на условие задачи, имеем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_\theta - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\theta \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_S = \frac{\partial(p,V)}{\partial(\theta,S)} =$$
$$= \frac{\partial(p,V)}{\partial(\theta,V)} \cdot \frac{\partial(\theta,V)}{\partial(\theta,S)} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_V \Big/ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_\theta$$

Последним отношение равно единице в силу существования дифференциального соотношения для свободной энергии

$$d\mathcal{F} = -Sd\theta - pdV,$$

согласно которому равенство смешанных производных функции $\mathcal{F}$ приводит к известной формуле

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\theta} = \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{V}.$$

Задача 31.

Рассчитать свободную энергию и химический потенциал идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса.

(решение см. [2], стр. 165-166 или[1], стр. 188)

Задача 32.

Определить внутреннюю энергию моля идеального газа, находящегося в установившемся состоянии во вращающемся с угловой скоростью ω цилиндре радиуса R и высоты $h = 1$ см, если его температура равна θ, а масса молекулы газа m.

(решение см. [2], стр. 166-167 или [1], стр. 190-191)

Задача 33.

Считая, что удельная внутренняя энергия ε связана с величиной pv, где $v = V/N$, линейным соотношением $pv = k\varepsilon$, найти уравнение адиабаты для такой системы в переменных $p - v$, $p - \theta$ и $\theta - v$.

Пологая, что теплоемкость системы c_V пропорциональна $\theta^a (a > 0)$, определить с точностью до численных коэффициентов внутреннюю и свободную энергии $\varepsilon(\theta, v)$ и $f(\theta, v)$, уравнение состояния $p(\theta, v)$ и разность теплоемкостей $c_p - c_V$.

(решение см. [2], стр. 168-169 или [1], стр. 193-194)

Задача 34.

Рассчитать связанные с наличием поля E свободную энергию и термодинамические характеристики единицы объема изотропного диэлектрика, считая диэлектрическую постоянную $\epsilon = \epsilon(\theta)$ заданной. Рассмотреть варианты выбора в качестве внешнего параметра a величины $\mathcal{D}/4\pi$, P и E.

(решение см. [2], стр. 170 [1], стр. 195-196)

Задача 35.

Рассчитать внутреннюю и свободную энергии, энтропию и теплоемкости

c_H и c_M единицы объема парамагнетика Кюри-Вейсса, помещенного в магнитное поле H.

(решение см. [2], стр. 171-172 [1], стр. 196-197)

Задача 36.

Определить термические и калорические уравнения состояния газа в переменных (θ, V, N), если задано выражение для энтропии

$$S(\mathcal{E}, V, N) = N \ln \left\{ e^{5/2} \frac{V}{N} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{3} \frac{\mathcal{E}}{N} \right)^{3/2} \right\}$$

или для термодинамического потенциала омега

$$\Omega(\theta, V, \mu) = -V\theta \left(\frac{m\theta}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} e^{\mu/\theta}.$$

Задача 37.

Рассчитать намагничение и теплоемкость системы, удельная свободная энергия которой равна (β - постоянная величина)

$$f = -\theta \ln \left(2 \operatorname{ch} \frac{\beta H}{\theta} \right).$$

Задача 38.

Рассчитать теплоемкость системы, удельная свободная энергия которой равна (Δ - величина постоянная)

$$f = -\theta \ln \left(1 + e^{-\Delta/\theta} \right).$$

Задача 39.

В низкотемпературной области калорическое уравнение состояния подавляющего числа твердых тел ведет себя как $C_V = bv\theta^3 + \ldots$, где b - константа. Показать, что разность теплоемкостей $C_p - C_V$, где C_p - экспериментально измеряемая теплоемкость твердого тела, имеет не гарантированной этой аппроксимацией порядок по температуре.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 173-174)

§5. Условия термодинамического равновесия и устойчивости

Задача 40.

Определить условия устойчивости однородной системы, фиксируемой постоянными значениями параметров (θ, V, N) (система в термостате, ограниченная частиценепроницаемыми стенками), и показать, что $C_p > C_V$.

Решение содержится в [2], стр. 100-103 (или[1], стр. 120-124) как частный случай пространственно однородной системы в отсутствии внешнего поля $U(\vec{r}) = 0$. Условие устойчивости системы по отношению к ее нагреванию см. [2], стр. 96-97 (или[1], стр. 117-118)

Задача 41.

Определить условие устойчивости состояния термодинамического равновесия относительно изменения числа частиц в системе с фиксированными значениями параметров (θ, V, μ) (система в термостате, выделенная воображаемыми стенками, фиксирующими ее объем).

Решение: так как условие устойчивости рассматриваемой системы определяется минимальным значением потенциала омега при фиксированных значениях параметров θ, V, μ, то, введя варьируемую величину - число частиц внутри геометрически выделенной области, будем иметь для отклонения Ω от равновесного минимального значения

$$\Delta\Omega|_{\theta,V,\mu} = \Delta\left(\mathcal{F}(\theta,V,N) - \mu N\right)_{\theta,V,\mu} =$$
$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}(\theta,V,N)}{\partial N} - \mu\right)\delta N + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\theta,V,N)}{\partial N^2}(\delta N)^2 + \ldots > 0$$

при любых значениях $\delta N \gtrless 0$, откуда следует уравнение для равновесного значения числа частиц в системе

$$\mu = \frac{\partial \mathcal{F}(\theta,V,N)}{\partial N} \quad \nleftrightarrow \quad N = N(\theta,V,\mu)$$

и условие устойчивости

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\theta,V,N)}{\partial N^2} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)_{\theta V} > 0,$$

которое полностью согласуется с условием положительности дисперсии числа частиц, определяемой большим каноническим распределением Гиббса

$$\overline{(\Delta N)^2} = \theta \left(\frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{\theta V} > 0.$$

Задача 42.
Определить зависимость плотности и давления идеального газа, находящегося при постоянной температуре в однородном поле силы тяжести, от высоты над уровнем моря.

Условие $\mu(\theta, v(\vec{r})) + U(\vec{r}) = const$ представляющее барометрическое распределение для плотности газа $n(\vec{r}) = 1/v(\vec{r})$, в случае идеального газа приобретает вид распределения Больцмана, см. [2], стр. 103 или [1], стр. 125.

§6. Фазовые переходы 1-го рода

Задача 43.
С помощью уравнения Клайперона-Клаузиуса
а) оценить характер зависимости температуры кипения воды от высоты над уровнем моря, считая $\theta \ll \theta_{\text{кр.}}, v_{\text{ж}} \ll v_{\text{г}} \cong \theta/p$;
б) оценить вес человека, достаточный для плавления льда под коньками при температуре $-1^o C$, если $v_{\text{ж}} - v_{\text{г}} = -0,091 \text{см}^3/\text{г}$.

(решение задачи а) см. [2], стр. 197-198 или [1], стр. 228-229)
б). Полагая $dp = \Delta p, d\theta = -1^o, \theta = 273^o K, q = 80\,\text{кал/г}$ и учитывая, что $1\,\text{кал} = 4,1868\,\text{Дж} = 41,868\,\text{атм}\cdot\text{см}^3$, получаем

$$\Delta p = \frac{q}{\theta(v_{\text{ж}} - v_{\text{г}})} \Delta\theta = 135\,\text{атм},$$

что при площади лезвия конька 34 см $\times$ 0,2 см дает искомый вес

$$P \cong 135 \cdot 7 = 945\,\text{кг} \sim 1\,\text{тонна},$$

что нереалистично.

Задача 44.
Используя в качестве уравнения состояния, изотермы которого ниже критической температуры $\theta_{\text{кр}}$ распадаются на два подсемейства, уравнение Ван-дер-Ваальса, определить скрытую теплоту перехода q и давление насыщенного пара $p(\theta)$ в случае $\theta \ll \theta_{\text{кр}}$.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 201-202 или [1], стр. 236)

§7. Фазовые переходы 2-го рода. Поведение систем вблизи критической точки

Задача 45.

Для газа Ван-дер-Ваальса определить зависимость от $z = \tau - 1 = \frac{\theta - \theta_{\text{кр}}}{\theta_{\text{кр}}}$ коэффициента изотермической сжимаемости $(\partial p/\partial v)_\theta$ и разности теплоемкостей $C_p - C_V$ при подходе к критической точке вдоль критической изобары $\pi = p/p_{\text{кр}} = 1$ и вдоль критической изохоры $\phi = v/v_{\text{кр}} = 1$ при $z \to 0$.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 208-211)

Задача 46.

С учетом эффекта Мейсснера для сверхпроводника и заданной зависимости критического магнитного поля $H_{\text{кр}}$ от температуры

$$H_{\text{кр}}(\theta) = H_0 \left[1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 \right] \text{при}\, \theta \lesssim \theta_0;\, H_{\text{кр}}(\theta) = 0 \,\text{при}\, \theta > \theta_0,$$

определить скрытую теплоту фазового перехода из нормального в сверхпроводящее состояние как функцию внешнего магнитного поля H и рассчитать скачок теплоемкости в точке фазового перехода в случае $H = 0$.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 221-223 или [1], стр. 246-249)

Задача 47.

Согласно полуфеноменологической теории фазовых переходов 2-го рода свободная энергия единицы объема ферромагнетика вблизи точки Кюри θ_0, $|\theta - \theta_0|/\theta_0 \ll 1$, в поле H имеют вид

$$\mathcal{F}(\theta, H, \sigma) = \mathcal{F}_0(\theta) + a(\theta - \theta_0)\sigma^2 + b\sigma^3 - \mu\sigma H,$$

где σ - параметр, определяемый из условия минимума свободной энергии $\partial\mathcal{F}/\partial\sigma = 0$, величины a, b и μ - константы. Исследовать особенности теплоемкости, намагничивания и восприимчивости, связанные с наличием упорядочения σ в системе.

(решение и подробное обсуждение см. [2], стр. 224-226)

Задача 48.

Полуфеноменологическая теория молекулярного поля Вейсса исходит из выражения для удельной свободной энергии

$$f(\theta, H, \sigma) = -\theta \ln\left(2\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta H + \theta_0\sigma}{\theta}\right) + \frac{\theta_0}{2}\sigma^2,$$

в которой параметр σ определяется из условия ее минимума $\partial f/\partial\sigma = 0$. Исследовать термодинамические характеристики (намагничение и теплоемкость) в области вблизи критической температуры θ_0.

(решение и обсуждение см. [2], стр. 226-229)

Задача 49.

Считая, что в ферромагнетике вблизи точки Кюри $\theta = \theta_0$, при которой в системе исчезает спонтанная намагниченность, теплоемкость $C_H \sim \tau^{-\alpha'}$, намагничение $M \sim \tau^{\beta}$ и восприимчивость $(\partial M/\partial H)_\theta = \chi \sim \tau^{-\gamma'}$, где

$$\tau = (\theta_0 - \theta)/\theta_0 < 0 \text{ и } |\tau| \ll 1, \alpha' > 0, \beta > 0, \gamma' > 0,$$

установить неравенство, связывающее эти критические показатели.

(решение см. [2], стр. 229-230 или [1], стр. 256)

Задача 50.

Показать, что если в соответствии с гипотезой подобия уравнение состояния магнетика имеет вид

$$H = M \cdot \Phi(\tau, M^{1/\beta}),$$

где $\Phi(\tau, M^{1/\beta})$ - произвольная однородная функция своих аргументов степени γ,

$$\Phi(\lambda\tau, \lambda M^{1/\beta}) = \lambda^{\gamma}\Phi(\tau, M^{1/\beta}),$$

то число β является критическим показателем намагниченности $M \sim |\tau|^{\beta}$ при $H = 0$ и $\tau < 0$, γ - изотермической восприимчивости $\chi \sim |\tau|^{\gamma}$ $(\gamma' = \gamma)$, что показатель критической изотермы $H \sim M^{\delta}$ при $\tau = 0$ равен $\delta = 1 + \gamma/\beta$ и что показатель теплоемкости $C \sim |\tau|^{-\alpha'}$ равен $\alpha' = 2 - 2\beta + \gamma$.

(решение см. [2], стр. 233-234)

Раздел 2. Задачи по статистической физике. Равновесные системы

§1. Распределение Максвелла и классический одноатомный идеальный газ.

Задача 51.
Вычислите интегралы

$$I_k(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\alpha x^2} dx, J_k(\alpha) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^k e^{-\alpha x^2} dx$$

в случаях $k = 2n$ и $k = 2n + 1$ где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\alpha > 0$.

(решение см. [1], стр. 349-350 или [3], стр. 78)

Задача 52.
Исходя из распределения Максвелла по скорости $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

$$w(\vec{v})d\vec{v} = w(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z - C \exp\left\{-\frac{mv^2}{2\theta}\right\} d\vec{v}$$

найти нормированные функции распределения по величинам $\vec{v}, \vec{p} = m\vec{v}$, одномерные распределения по $v_x, v = |\vec{v}|$ и $\varepsilon = mv^2/2$, определить наивероятнейшие значения трех последних величин и рассчитать средние значения $\overline{v_x}, \overline{v_x^2}, \overline{v}, \overline{v^2}, \overline{1/v}, \overline{\varepsilon}$ и $\overline{\varepsilon^2}$. Сопоставить величины $\overline{v}$ и $\sqrt{\overline{v^2}}$ с наивероятнейшим значением модуля скорости $(v)_{\text{нв}}$, а величины $\overline{\varepsilon}$ и $\sqrt{\overline{\varepsilon^2}}$ с наивероятнейшим значением кинетической энергии частиц газа $(\varepsilon)_{\text{нв}}$.

(решение и расчет см. [1], стр. 401-403 или [3], стр. 114)

Задача 53.
Рассчитать дисперсии и относительные флуктуации компоненты скорости v_x, модуля скорости v, кинетической энергии ε одной частицы, а также полной кинетической энергии E системы N частиц.

(решение [1], стр. 403-404 или [3], стр. 115)

Задача 54.
Подсчитать среднее число частиц классического идеального газа, падающих за секунду на $1\,\text{см}^2$ поверхности стенки и оценить эту величину

в масштабе числа Авогадро. Получить формулу Ричардсона для доли падающих на стенку частиц со скоростями, нормальные составляющие которых больше v_0.

(решение см. стр. [1], стр. 407-408 или [3], стр. 118)

Задача 55.

Используя распределения Максвелла, определить давление газа на стенку, если плотность числа частиц n и его температура θ заданы.

(решение см. [1], стр. 405-406 или [3], стр. 116)

Задача 56.

Рассчитать среднюю (в расчете на одну вылетающую частицу) энергию частиц идеального нерелятивистского классического газа, вылетающих в вакуум из небольшого отверстия в стенке сосуда.

(решение см. [1], стр. 408-409 или [3], стр. 119)

Задача 57.

Найти нормированное распределение $w_N(E)dE$ по полной энергии E системы N невзаимодействующих частиц нерелятивистского классического газа и с помощью этого распределения рассчитать наивероятнейшее значение энергии, ее среднее значение, дисперсию и относительную флуктуацию.

(решение см. [1], стр. 415-418 или [3], стр. 123-125)

Задача 58.

Для равновесного идеального классического релятивистского газа, зависимость энергии частиц которого от импульса определяется формулой $E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, определить наивероятнейшее значение квадрата импульса $(p^2)_{\text{нв}}$.

Решение: обозначив $\xi = (p/mc)^2$ и приравняв нулю производную от функции $\xi \cdot \exp\left\{-\frac{mc^2}{\theta}\sqrt{\xi+1}\right\}$, получим

$$(p^2)_{\text{нв}} = 2m\theta\left(\frac{\theta}{mc^2} + \sqrt{\left(\frac{\theta}{mc^2}\right)^2 + 1}\right) =$$

$$= \begin{cases} 2m\theta & \text{в случае } \theta \ll mc^2, (E_p \cong p^2/2m), \\ \left(\frac{2\theta}{c}\right)^2 & \text{в случае } \theta \gg mc^2, (E_p \cong pc). \end{cases}$$

Задача 59.

Показать, что для идеального ультрарелятивистского ($E_p = pc$) классического газа относительная флуктуация энергии частиц равна

$$\delta E_p = \sqrt{\overline{(\Delta E_p)^2}}/\overline{E_p} = 1/\sqrt{3} \cong 0,577.$$

Задача 60.

Исходя из трехмерного распределения $w(\vec{p}) = C\exp\{-E_p/\xi\}$ определить в случае $E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}, p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ распределение по компонентам импульса p_x.

Решение: обозначая $(p_y^2 + p_z^2)/m^2c^2 = \xi$ и интегрируя $w(\vec{p})$ по переменным p_y и p_z в цилиндрических координатах, $dp_y dp_z \to m^2c^2\pi d\xi$, получим

$$w(p_x) = C\frac{2\pi\theta^2}{c^2}\left(1 + \frac{mc^2}{\theta}\sqrt{\frac{p_x^2}{m^2c^2} + 1}\right)\exp\left\{-\frac{mc^2}{\theta}\sqrt{\frac{p_x^2}{m^2c^2} + 1}\right\}.$$

§2. Канонические распределения

Задача 61.

Показать, что в случае микроканонического, канонического и большого канонического распределения Гиббса w_n по микроскопическим состояниям системы энтропия системы может быть представлена в виде

$$S = -\sum_n w_n \ln w_n = -\overline{\ln w_n}.$$

(решение см. [1], стр. 384-385 или [3], стр. 101-102)

Задача 62.

Показать, что если определить энтропию системы как $S = -\sum\limits_n w_n \ln w_n$; где w_n - любое нормированное на единицу распределение по микроскопическим состояниям системы с фиксированным числом частиц и задать внутреннюю энергию системы $\varepsilon = \sum\limits_n E_n w_n$, то максимальному значению энтропии (которому в соответствии со второй частью II начала термодинамики соответствует равновесное состояние системы с фиксированным значением ε) соответствует функция w_n, являющаяся каноническим распределением Гиббса с температурой θ, определяемой соотношением $\partial S/\partial \varepsilon = 1/\theta$.

(решение см. [1], стр. 385-387 или [3], стр. 102-103)

Задача 63.

Для классического идеального газа рассчитать:
а) статистический вес $\Gamma(\varepsilon, V, N)$ газа из N частиц, находящегося в объеме V, если его энергия задана в интервале значений от $\varepsilon - \delta\varepsilon$ до ε;
б) каноническую статистическую сумму $Z(\theta, V, N)$;
с) большую каноническую статистическую сумму $\zeta(\theta, V, \mu)$.

(решение см. [1], стр. 418-420 или [3], стр. 125-126)

Задача 64.

Показать, что при любой зависимости энергии частицы невырожденного идеального газа от импульса E_p уравнение состояния системы будет иметь вид $pv = \theta$

(решение следует из общей структуры статистического интеграла классической системы $Z(\theta, V, N)$)

Задача 65.

Определить первую релятивистскую поправку по параметру $\theta/mc^2 \ll 1$ к удельной теплоемкости c_V слабонерелятивистского идеального классического газа.

Решение: подставляя разложение

$$E_p/\theta = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}/\theta = \frac{mc^2}{\theta} + \frac{p^2}{2m\theta} - \left(\frac{p^2}{2m\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\theta}{mc^2} + \dots$$

в импульсную часть статистического интеграла, удерживая только первую поправку по θ/mc^2,

$$z(\theta) = \int_0^\infty e^{-E_p/\theta} 4\pi p^2 dp =$$

$$= e^{-\frac{mc^2}{\theta}} \int_0^\infty e^{\frac{p^2}{2m\theta}} 4\pi p^2 dp \left(1 + \left(\frac{p^2}{2m\theta}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\frac{\theta}{mc^2} + \dots\right),$$

и рассчитывая соответствующие пуассоновские интегралы, получим в этом приближении выражения для удельной внутренней энергии $\varepsilon(\theta) = \theta^2 \partial \ln z(\theta)/\partial\theta$ и теплоемкости

$$c_V = \frac{3}{2} + \frac{15}{4}\frac{\theta}{mc^2} + \dots .$$

(см. более подробно [1], стр. 411-414 или [3], стр. 121-122)

Задача 66.
С помощью канонического распределения Гиббса показать, что на каждую степень свободы классической равновесной статистической системы приходится в среднем одна и та же величина кинетической энергии, равная $\theta/2$, а на каждую колебательную степень свободы - еще и средняя потенциальная энергия, равная тоже $\theta/2$. С помощью этой теоремы о равнораспределении энергии по степеням свободы классической статистической системы оценить теплоемкость многоатомного идеального газа и теплоемкость «классического» твердого тела.

(решение и обсуждение см. [1], стр. 424-427 или [3], стр. 129-131)

§3. Идеальный одноатомный ферми-газ

Задача 67.
Показать, что вне зависимости от типа статистики для идеальных газов выполняются соотношения $pV = \frac{2}{3}\varepsilon$ в нерелятивистском случае, когда $E_p = \frac{p^2}{2m}$, и $pV = \frac{1}{3}\varepsilon$ в ультрарелятивистском случае, когда $E_p = pc$.

(решение см. [1], стр. 524-525 или [3], стр. 212)

Задача 68.
Исследовать температурное поведение химического потенциала идеального ферми-газа заданной плотности. Рассмотреть области низких и высоких температур, а также область, в которой химический потенциал, меняя свой знак, обращается в нуль.

(решение см. [1], стр. 525-528 или [3], стр. 213-214)

Задача 69.
Определить среднее число частиц вырожденного идеального ферми-газа, падающих за секунду на $1\,\text{см}^2$ границы системы с импульсами, нормальные составляющие которых больше p_0 в случае $p_0^2/2m - \varepsilon_F \gg \theta$ (формула Ричардсона для вырожденного электронного газа).

(решение см. [1], стр. 530-532 или [3], стр. 216)

Задача 70.
Определить барометрическое распределение плотности идеального ферми-газа, помещенного в однородное поле силы тяжести $U(z) = mgz$ в случае $\theta = 0$.

(решение см. [1], стр. 534-535 или [3], стр. 220)

Задача 71.

При переходе электронного газа из нормального состояния в сверхпроводящее энергия возбужденного состояния электрона под заполненной сферой Ферми $E_p \cong \frac{p_F}{m}(p-p_F)$ существенно модифицируется: появляется энергетическая щель Δ порядка температуры перехода в сверхпроводящее состояние, $E_p = \Delta + \varepsilon_p$. Аппроксимируя функцию ε_p очень крутой параболой $\varepsilon_p = \frac{(p-p_F)^2}{2m^\star}$, такой что при $\theta \ll \Delta$ функция $\exp\{-\varepsilon_p/\theta\}$ ограничивает область интегрирования небольшим интервалом импульсов p вблизи $p = p_F$, определить в сделанных предположениях теплоемкость системы C_{VN}.

(решение см. [1], стр. 536 или [3], стр. 220-221)

Задача 72.

Для модели полупроводника, основное состояние ($\theta = 0$) которого представляет полностью заполненную валентную зону и пустую зону проводимости, отделенную от валентной запрещенной энергетической зоной Δ, показать, что значение химического потенциала μ лежит в интервале $0 < \mu < \Delta$ (т.е в запрещенной зоне). Определить среднее число возбужденных состояний типа частица (в зоне проводимости) - дырка (в валентной зоне) при температуре $\theta \ll \Delta$, внутреннюю энергию и теплоемкость системы, полагая для простоты, что эффективные массы электронного m и дырочного $m^\star$ возбуждений равны друг другу.

Решение. Энергия электрона E_p, перешедшего в результате возбуждения из заполненной зоны в зону проводимости, вблизи дна последней можно аппроксимировать квадратичной зависимостью от импульса $E_p = \Delta + \frac{p^2}{2m}$, где m - эффективная масса электрона, а сама энергия отсчитывается от уровня потолка валентной зоны. Энергия образовавшейся «дырки» (вакантного места в заполненной валентной зоне) $E_p^\star$, отсчитывается от этого же уровня, также аппроксимируется вблизи потолка зоны квадратичной зависимостью от импульса, будет отрицательной и характеризуется своей эффективной массой $m^\star$, $E_p^\star = -\frac{p^2}{2m^\star}$. так как условие $\exp\{\frac{\Delta}{2\theta}\} \gg 1$ практически выполняется вплоть до температур $\theta \sim 10^3 K$, то мы вправе положить $\exp\{\frac{\Delta-\mu}{\theta}\} \gg 1$ и $\exp\{\frac{\mu}{\theta}\} \gg 1$, что сразу сводит проблему (как и в задаче 71) на уровень рассмотрения невырожденного ферми-газа: средние числа заполнения электронных состояний в зоне проводимости, где $E_p > \Delta > 0$, запишутся как

$$n_p = \frac{1}{e^{\frac{E_p-\mu}{\theta}}+1} = \frac{1}{e^{\frac{p^2}{2m\theta}+\frac{\Delta-\mu}{\theta}}+1} \cong e^{\frac{\mu-\Delta}{\theta}} e^{-\frac{p^2}{2m\theta}},$$

а средние числа «заполнения» дырочных состояний внутри валентной зоны, где $E_p^\star < 0$, как

$$1-n_p^\star = 1-\frac{1}{e^{\frac{E_p^\star-\mu}{\theta}}+1} = \frac{1}{e^{-\frac{E_p^\star}{\theta}+\frac{\mu}{\theta}}+1} \cong e^{-\frac{\mu}{\theta}} e^{-\frac{p^2}{2m^\star\theta}}.$$

Так как дырочное возбуждение возникает при переходе электрона из валентной зоны через Δ-барьер в зону проводимости, то число возбужденных состояний в системе можно записать в виде

$$N^\star(\theta,V) = \sum_p n_p = \sum_p (1-n_p^\star),$$

или, переходя к интегрированию,

$$N^\star(\theta,V) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} e^{\frac{\mu-\Delta}{\theta}} \int e^{-\frac{p^2}{2m\theta}}\, d\vec{p} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{\mu}{\theta}} \int e^{-\frac{p^2}{2m^\star\theta}}\, d\vec{p}.$$

Интегралы по импульсам электронов и дырок равны $(2\pi m\theta)^{3/2}$ и $(2\pi m^\star\theta)^{3/2}$, а написанное выше соотношение (равенство чисел электронных и дырочных состояний) представляет уравнение для химического потенциала системы. Таким образом, мы получаем

$$\mu = \frac{\Delta}{2} + \frac{3}{2}\theta \ln\frac{m^\star}{m} \cong \frac{\Delta}{2},$$

$$N^\star(\theta,V) = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi\sqrt{mm^\star}\theta)^{3/2} e^{-\frac{\Delta}{2\theta}}.$$

Для температурной части внутренней энергии системы $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$, где ε_0 - энергия ее основного состояния

$$\Delta\varepsilon = \sum_p E_p n_p + \sum_p E_p^\star (1-n_p^\star) =$$

$$= \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}\left(e^{\frac{\mu-\Delta}{\theta}} \int (\frac{p^2}{2m}+\Delta) e^{-\frac{p^2}{2m\theta}}\, d\vec{p} + e^{-\frac{\mu}{\theta}} \int \frac{p^2}{2m^\star} e^{-\frac{p^2}{2m^\star\theta}}\, d\vec{p}\right)$$

и теплоемкости сразу в упрощенном варианте $m^\star \cong m$ получаем в случае $\theta \ll \Delta$ выражения

$$\Delta\varepsilon = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi m\theta)^{3/2}(3\theta+\Delta) e^{-\frac{\Delta}{2\theta}} \cong \Delta N^\star(\theta,V),$$

$$C_V = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{2V}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi m\theta)^{3/2}\left(\frac{15}{2} + 3\frac{\Delta}{\theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\theta}\right)^2\right)e^{-\frac{\Delta}{2\theta}} \cong$$
$$\cong \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\theta}\right)^2 N^\star(\theta, V)$$

с характерным для всех систем со спектром возбужденных состояний, отделенным от основного состояния энергетической щелью, экспоненциальным стремлением к нулю при $\theta \to 0$. (Решение см. также [3], стр. 221-222)

Задача 73.

Определить парамагнитную восприимчивость $N = \lim_{H\to 0} M/H$ газа свободных электронов, связанную с наличием у них только собственных магнитных моментов (спиновый парамагнетизм Паули). Рассмотреть случаи вырожденных и невырожденных газов.

(решение см.[1], стр. 537-539 или [3], стр. 224-225)

Задача 74.

Для случаев $\theta = 0$ и $\theta \gg \varepsilon_F$ сравнить поведение намагниченности $M(H)$ газа электронов, связанной с наличием у них собственных магнитных моментов $\pm\beta$, при любых значениях βH, включая область насыщения магнитного момента системы.

(решение см.[1], стр. 539-541 или [3], стр. 225-227)

Задача 75.

Определить в переменных (θ, V, N, H) намагничение невырожденного газа свободных электронов. Выделить парамагнитный и диамагнитный вклады в полное намагничение системы.

(решение см.[1], стр. 541-546 или [3], стр. 227-230)

Задача 76.

Определить химический потенциал двухмерного идеального нерелятивистского ферми-газа, а также его низкотемпературную теплоемкость.

(решение см.[1], стр. 554-555 или [3], стр. 235)

Задача 77.

Рассчитать энергию основного состояния идеального ферми-газа , учитывая релятивистскую зависимость энергии его частиц от импульса, а также определить давление газа в случае $\theta = 0$.

решение см.[1], стр. 558-559 или [3], стр. 237-238, а также далее:
Записывая термодинамический потенциал $\Omega = -pV$ в виде

$$\Omega = -\theta \sum_p \ln\left(1 + e^{-\frac{E_p - \mu}{\theta}}\right) =$$

$$= -\theta \frac{gV}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{E_p-\mu}{\theta}} + 1} \frac{1}{\theta} \frac{\partial E_p}{\partial p} \frac{4}{3} \pi p^3 \, dp,$$

получим, положив $\theta = 0$ и взяв интеграл

$$I(\xi_F) = \int\limits_0^{\xi_F} \frac{\xi^4 \, d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = \frac{1}{8} \xi_F \sqrt{1 + \xi_F^2}(2\xi_F^2 - 3) +$$

$$+ \frac{3}{8} \ln\left(\xi_F + \sqrt{1 + \xi_F^2}\right),$$

уравнение состояния системы в случае $\theta = 0$ в виде

$$pv = \frac{mc^2}{\xi_F^2} I(\xi_F) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\frac{p_F^2}{2m}\right) + \ldots, & \text{в случае } p_F \ll mc, \\ \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} p_F c\right) + \ldots, & \text{в случае } p_F \gg mc. \end{cases}$$

§4. Идеальный одноатомный бозе-газ

Задача 78.
Показать, что наличие выделенного слагаемого с $p = 0$ в выражении для термодинамического потенциала Ω при $\theta < \theta_F$ для идеального трехмерного нерелятивистского газа не изменяет общего для идеальных газов соотношения $\Omega = -pV = -\frac{2}{3}\varepsilon$.

(решение см.[1], стр. 566-567 или [3], стр. 251-252)

Задача 79.
Опредилить границу области конденсации идеального бозе-газа на $(p-v)$ - плоскости и исследовать, как меняется вдоль этой границы энтропия системы и теплоемкость C_{VN}.

(решение см.[1], стр. 567 или [3], стр. 252)

Задача 80.
Вырожденный идеальный бозе-газ находиться в поле силы тяжести mgz

в бесконечно высоком вертикальном цилиндре с площадью основания $1\,\text{см}^2$. Определить барометрическое распределение плотности числа частиц $n(r)$ и выяснить условие вырожденности такой системы.

(решение см.[1], стр. 571-573 или [3], стр. 251-255)

Задача 81.

Аппроксимируя начальный участок зависимости энергии возбуждения бозе-газа от импульса $E(p)$ линейной зависимостью $E_{\text{фон}}(p) = pc$ («фононы»), где c - скорость распространения упругих колебаний в системе, а в области $p = p_0$, в которой имеется провал функции $E(p)$ квадратичной зависимостью по отношению к $(p - p_0)$, характеризующей отклонение функции $E(p)$ от своего минимального значения $E(p_0) = \Delta$, $E_{\text{рот}}(p) = \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^\star}$ («ротоны»), определить среднее число возбужденных фононов $N^\star_{\text{фон}}$ и ротонов $N^\star_{\text{рот}}$, а также удельную теплоемкость c_{VN} фонон-ротонной системы при $\theta \ll \Delta$.

(решение см.[1], стр. 574-575 или [3], стр. 256-258)

Задача 82.

Определить химический потенциал двухмерного идеального нерелятивистского бозе-газа, а также его низкотемпературную теплоемкость.

(решение см.[1], стр. 565-566 или [3], стр. 250-251)

§5. Идеальный невырожденный газ с внутренними степенями свободы

Задача 83.

Определить вклад в свободную и внутреннюю энергии и теплоемкость системы за счет того, что каждая из частиц системы может находиться на одном из двух энергетических уровней E_0 и $E_1 = E_0 + \Delta$ с единичными кратностями вырождения. Рассмотреть вопрос о возможности такой системе достичь состояний, которые характеризовались бы отрицательными значениями температуры.

(решение и обсуждение см.[1], стр. 599-603 или [3], стр. 276-278)

Задача 84.

Рассчитать вращательную теплоемкость для водорода H_2, учитывая его возможные пара и ортосостояния и соответствующие изменения правил суммирования по орбитальному квантовому числу l.

(решение см.[1], стр. 579-582 или [3], стр. 262-265)

Задача 85.
Модель классического идеального газа состоит из упруго связанных пар одинаковых атомов массы m, потенциал взаимодействия которых $U(r) = k(r - r_0)^2$, где $2r$ - расстояние между атомами. Считая, что $kr^2 \gg \theta$ и пренебрегая экспоненциально малыми поправками, пропорциональными $\exp(-kr_0^2/\theta)$, по сравнению с членами $\sim \frac{\theta}{kr_0^2}$, определить теплоемкость газа.

(решение см.[1], стр. 584-587 или [3], стр. 265-267)

Задача 86.
Рассчитать первые, пропорциональные температуре поправки к удельной колебательной теплоемкости классического идеального двухатомного газа и к средней величине длины его молекул, связанные с учетом малых ангармонических членов в потенциале взаимодействия атомов $U(x) = \alpha x^2 + \beta x^3 + \gamma x^4,\ \alpha > 0$, где x - отклонение атомов от положения их равновесия.

(решение см.[1], стр. 587-589 или [3], стр. 268-269)

Задача 87.
Система невзаимодействующих жестких диполей с магнитными моментами μ помещена в постоянное магнитное поле H. Определить вклады во внутреннюю энергию системы и ее теплоемкость за счет вращательных движений диполей и их взаимодействия с магнитным полем H, намагничение системы, а так же равновесное распределение диполей по углам.

(решение см.[1], стр. 593-595 или [3], стр. 272-273)

§6. Термодинамические системы осцилляторов

Задача 88.
Определить спектральную плотность энергии равновесного электромагнитного излучения в полости, заполненной диспергирующей средой с заданным показателем преломления $n(\omega)$.

(решение см.[1], стр. 608-609 или [3], стр. 282)

Задача 89.
Определить первую квантовую поправку к классическому закону Дюлонга и Пти для теплоемкости твердого тела.

(решение см.[1], стр. 507-508 или [3], стр. 199-200)

Задача 90.
В рамках теории Дебая определить в случае $\theta \ll \theta_{Д}$ первую поправку к кубической по температуре зависимости теплоемкости твердого тела.

(решение см.[1], стр. 508 или [3], стр. 200)

Задача 91.
Используя дебаевскую модель теплового движения в твердом теле, получить закон Линдемана, связывающий температуру Дебая с температурой плавления и критической амплитудой смещений узлов кристаллической решетки.

(решение см.[1], стр. 512-513 или [3], стр. 203-204)

Задача 92.
Определить давление насыщенного пара над дебаевским кристаллом, полагая пар идеальным классическим газом.

(решение см.[1], стр. 615-616 или [3], стр. 289-290)

§7. Неидеальный классический газ

Задача 93.
Выразить через двухчастичные корреляционные функции среднюю энергию взаимодействия частиц друг с другом для системы, состоящих из равных количеств положительных и отрицательных ионов.

(решение см.[1], стр. 717 или [3], стр. 371)

Задача 94.
Выразить дисперсию плотности числа частиц равновесной однокомпонентной системы через парную корреляционную функцию $F_2(R)$.

(решение см.[1], стр. 720-721 или [3], стр. 373-374)

Задача 95.
Выразить через корреляционную функцию $h(R) = F_2(R) - 1$ и связанную с ней интегральным соотношением Орнштейна - Цернике функцию $c(R)$ коэффициент изотермической упругости системы $\left(-\frac{\partial p}{\partial v}\right)_\theta$.

(решение см.[1], стр. 729-730, а также стр. 699 или [3], стр. 378-379 и стр. 357)

Задача 96.

Ограничиваясь длинноволновой аппроксимацией фурье-образа «прямой» корреляционной функции $c(R)$, связанной интегральным соотношением Орнштейна - Цернике с парной корреляционной функцией $F_2(R) - 1 = h(R)$,

$$c_k = c_0 - ak^2 + ...,$$

показать, что функция $h(R)$ на больших расстояниях вблизи критической точки имеет дебаевскую структуру с конечным радиусом корреляции.

(решение см.[1], стр. 699-700 или [3], стр. 357-358)

Задача 97.

Для системы с парным центральным взаимодействием частиц друг с другом $\Phi_{ij} = \Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$ связать парную корреляционную функцию $F_2(R)$ с вариацией по потенциалу взаимодействия свободной энергии системы.

(решение см.[1], стр. 735-736 или [3], стр. 382-383)

Задача 98.

На основе первого уравнения в цепочке Боголюбова для равновесных корреляционных функций построить интегральное уравнение для парной корреляционной функции $F_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = F_{12}$, аппроксимируя, следуя Кирквуду, трехчастичную функцию распределения $F_3(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = F_{123}$ с помощью произведения трех двухчастичных функций, $F_{123} = F_{12} \cdot F_{23} \cdot F_{13}$.

(решение см.[1], стр. 742-743 или [3], стр. 387-389)

Задача 99.

Рассчитать конфигурационный интеграл Q для системы N частиц с короткодействием в приближении низкой плотности по методу Майера с точностью до членов порядка $1/v$ и получить выражение для первого вириального коэффициента $\beta_1(\theta)$ в уравнении состояния системы.

Упрощенный вариант решения (более подробно см. метод Майера, [1], стр. 747-759 или [3], стр. 390-402).

Оставляя в конфигурационном интеграле Q гарантированную статистическую асимптотику

$$Q(\theta, V, N) = \frac{1}{V^N} \int\limits_{(V)} \exp\left(-\frac{1}{\theta} \sum_{1 \le i < j \le N} \Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \right) d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N \overset{as}{=}$$

$$\overset{as}{=} [q(\theta, v)]^N,$$

представим величину q в виде разложения по плотности с точностью до первого его члена, обозначив коэффициент при нем как $\beta_1/2$,

$$q(\theta, v) = 1 + \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2}\beta_1(\theta) + ... ; \quad \ln q = \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2}\beta_1(\theta) + ...$$

Тогда уравнение состояния газа запишется в виде

$$p = \theta\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_{\theta V} = \frac{\theta}{v}\left(1 - \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2}\beta_1(\theta) + ...\right).$$

Чтобы выяснить, какие члены в самом $Q(\theta, V, N)$ ответственны за правильную статистическую асимптотику этой величины, проще всего «восстанавливать» их с помощью $q(\theta, v)$:

$$Q_{as} = \left[1 + \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2}\beta_1(\theta) + ...\right]^N = 1 + N \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2}\beta_1(\theta) + ...$$

Обратим внимание, что последняя формула - не разложение в ряд, многоточие в ней не означает принебрежения последующими членами (они не малы, напротив, $\frac{N\beta_1}{2v} \gg 1$ при $N \gg 1$, а символизирует все оставшиеся при возведении многочлена в N-ю степень слагаемые. Кроме того, мы с гарантией можем утверждать, что в Q_{as} нет иных членов $\sim N/v$, кроме выписанного. Если теперь непосредственно из Q получить именно этот член $\sim N/v$, то образовавшийся коэффициент при нем определит (в предельном случае $N \to \infty$, $v = const$) искомое выражение для $\frac{1}{2}\beta_1(\theta)$.

Для выполнения этой (в нашем случае - минимальной) программы воспользуемся приемом, предложенным Дж. Майером. Введем функцию

$$f_{ij} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \exp\left(-\frac{1}{\theta}\Phi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\right) - 1$$

и исключим с ее помощью потенциал Φ из подинтегрального выражения в Q. Имеем

$$Q = \frac{1}{V^N}\int\limits_{(V)} d\vec{r}_1...d\vec{r}_N \prod_{i<j}(1 + f_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{V^N}\int\limits_{(V)} d\vec{r}_1...d\vec{r}_N(1 + f_{12})(1 + f_{13})...(1 + f_{(N-1)N}).$$

Перемножая все двучлены, сохраняя $\frac{N(N-1)}{2}$ - кратные произведение единиц и сумму произведений $\frac{N(N-1)}{2} - 1$ единиц на одну из функций f_{ij},

$$Q = \frac{1}{V^N} \int\limits_{(V)} d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N (1 + \sum_{1 \le i < j \le N} f_{ij} + ...).$$

интегрирование единицы дает V^N, интеграл от следующего слагаемого дает множитель V^{N-2} за счет интегрирования по $d\vec{r}_3 ... d\vec{r}_N$, причем число таких интегралов равно числу слагаемых в сумме $1 \le i < j \le N$, поэтому

$$Q = 1 + \frac{N(N-1)}{2} \cdot \frac{1}{V^2} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 f(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) + ... \, .$$

Все последующие члены будут содержать по две и более функций Майера и будут пропорциональны степени V^{-2-N}, где $n \ge 1$. Переходя в последнем интеграле к переменным $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{R}$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2$ и замечая , что $\int\limits_{(V)} d\vec{r}_2 = V$, получаем (с полной гарантией, что в невыписанных слагаемых нет больше членов $\sim N/v$)

$$Q = 1 + N \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{2} \int f(R) d\vec{R} + ... \, .$$

Отсюда уже получаем формулу для величины $\beta_1(\theta)$, называемой первым неприводимым интегралом Майера,

$$\beta_1(\theta) = \int f(R) d\vec{R} = \int\limits_0^\infty \left(e^{-\frac{\Phi(R)}{\theta}} - 1 \right) 4\pi R^2 d\vec{R}.$$

Уравнение состояния с первой вариационной поправкой $\frac{pv}{\theta} = 1 - \frac{\beta_1(\theta)}{2v}$ содержит в себе как частный случай уравнение Ван-дер-Ваальса, записанное в том же по $1/v$ приближении. Положим для простоты, что

$$\Phi(R) = \begin{cases} \infty & \text{в области } R < d = 2r_0, \\ -U(R) & \text{в области } R > d, \end{cases}$$

и предположим, что для всех $R > d$ $U(R) \ll \theta$. Тогда

$$f(R) = \begin{cases} -1 & \text{в области } R < d \\ U(R)/\theta & \text{в области } R > d \end{cases}$$

и

$$\frac{pv}{\theta} = 1 + \frac{1}{v}\left(\frac{2}{3}\pi d^3 - \frac{1}{\theta}\int\limits_d^\infty U(R)4\pi R^2\, dR\right) + \dots .$$

Сравнивая этот результат с плотностным разложением уравнения Ван-дер-Ваальса

$$\frac{pv}{\theta} = \frac{v}{v-b} - \frac{a}{v} = 1 + \frac{1}{v}\left(b - \frac{a}{\theta}\right) + \dots,$$

получаем для ван-дер-ваальсовских констант известные формулы

$$b = \frac{2}{3}\pi d^3, \quad a = \int\limits_d^\infty U(R)4\pi R^2\, dR.$$

Отметим, что сопоставление уравнений состояния с первой вариационной поправкой $\beta_1(\theta)$ с уравнением Ван-дер-Ваальса оказалось возможным помимо низкоплотностного только в высокотемпературном приближении, т.е. уравнение Ван-дер-Ваальса можно считать микроскопически обоснованным только в области $v \gg v_{\text{кр}}$ и $\theta \gg \theta_{\text{кр}}$, далекой от возможных фазовых переходов.

Задача 100.

Рассчитать статистическую сумму для одномерной модели Изинга

$$H = -I\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\sigma_{i+1} - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i,$$

где $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N)$ - независимые друг от друга величины, принимающие два значения, $\sigma_i = \pm 1$,

а) в случае $I = 0$ - идеальные системы,

б) в случае $h = 0$ - изотропные системы,

в) в общем случае.

(решение см.[1], стр. 771-774 или [3], стр. 410-412)

Список литературы

[1] И.А.Квасников, Термодинамика и статистическая физика, теория равновесных систем. Изд. МГУ, 1991 г. 800 с.

[2] И.А.Квасников, Термодинамика и статистическая физика, том 1, теория равновесных систем, термодинамика. Изд. УРСС, М., 2002г., 283 с.

[3] И.А.Квасников, Термодинамика и статистическая физика, том 2, теория равновесных систем, статистическая физика. Изд. УРСС, М., 2002г., 429 с.

[4] И.А.Квасников, Д.В.Кукин, Задачи по курсу термодинамике и статистической физики, часть I. Изд. МГУ, 1981 г., 88 с.

Помимо части задач из общего задания по термодинамике и статистической физике на экзамен в зимнюю сессию выносятся следующие вопросы:

Термодинамика

1. I начало термодинамики. Химический потенциал и калорическое уравнение состояния термодинамической системы.
2. II начало термодинамики для равновесного процесса в формулировке Клаузиуса. Невозможность осуществления вечного двигателя II рода.
3. Вывод условия согласования термического и калорического уравнений состояния термодинамической системы.
4. Вывод системы уравнений для расчета удельной внутренней энергии термодинамической системы по заданным уравнениям состояния и ее решение для газа Ван-дер-Ваальса.
5. Вывод уравнения для расчета удельной энтропии термодинамической системы по заданным уравнениям состояния и его решение для газа Ван-дер-Ваальса.
6. Химический потенциал термодинамической системы и его расчет с помощью уравнений состояния. Химический потенциал равновесного электромагнитного излучения.
7. Теорема Карно и ее связь с формулировкой Клаузиуса для II начала термодинамики. Абсолютная температура и энтропия.
8. II начало термодинамики для неравновесных процессов и его следствия. Общие условия равновесия и устойчивости изолированной системы.
9. III начало термодинамики. Поведение энтропии и теплоемкости вблизи абсолютного нуля температуры.
10. Свободная энергия как термодинамический потенциал и ее экстремальные свойства. Выражение уравнения состояния и внутренней энергии термодинамической системы через ее свободную энергию.
11. Термодинамический потенциал Гиббса и его экстремальные свойства. Выражение калорического уравнения состояния и химического потенциала термодинамической системы через потенциал Гиббса.
12. Энтальпия как термодинамический потенциал. Связь теплоемкости при постоянном давлении с энтальпией.
13. Связь внутренней энергии, потенциала Гиббса и энтальпии термодинамической системы с ее свободной энергией (формулы Гиббса–Гельмгольца).
14. Термодинамический потенциал Ω и его экстремальные свойства. Как получить уравнение состояния $p(\theta, V, N)$ по известному выражению для

$\Omega(\theta, V, \mu)$?
15. Энтропия как термодинамический потенциал и ее экстремальные свойства.
16. Вывод системы уравнений для расчета удельной свободной энергии по заданным термическому и калорическому уравнениям состояния термодинамической системы.
17. Вывод системы уравнений для расчета внутренней энергии и энтропии по заданным калорическому уравнению состояния и энергии основного состояния системы $\epsilon_0(v)$.
18. Термодинамические свойства равновесного электромагнитного излучения. Вывод закона Стефана–Больцмана и вычисление химического потенциала равновесного электромагнитного излучения.
19. Условие устойчивости равновесной термодинамической системы под поршнем по отношению к механическим воздействиям.
20. Условия устойчивости термодинамической системы по отношению к тепловым воздействиям.
21. Условия термодинамического равновесия системы во внешнем статическом поле.
22. Общие условия термодинамического равновесия двухфазной системы и получение правила фаз Гиббса для многокомпонентных систем.
23. Фазовые переходы I рода. Вывод уравнения Клапейрона–Клаузиуса.
24. Фазовые переходы II рода. Вывод системы уравнений Эренфеста.

Статистическая физика

1. Микроканоническое распределение Гиббса, статистический вес и его связь с термодинамическими характеристиками системы.
2. Каноническое распределение Гиббса, статистическая сумма и ее связь со свободной энергией термодинамической системы. Рассчет дисперсии полной и удельной энергии системы при помощи канонического распределения Гиббса.
3. Большое каноническое распределение Гиббса, большая статистическая сумма и ее связь с термодинамическим потенциалом Ω. Расчет дисперсии полного числа частиц в системе при помощи большого канонического распределения Гиббса.
4. Принцип тождественности в квантовой и классической теориях. Каноническая и большая каноническая суммы в квазиклассическом приближении. Критерий применимости квазиклассического приближения и температура вырождения.
5. Распределение Максвелла, его связь с каноническим распределением Гиббса и условия его применимости. Вывод распределения для компо-

ненты скорости, абсолютного значения скорости и кинетической энергии частицы газа.

6. Вычисление статистического интеграла для идеального классического газа и вывод выражения для его удельной энтропии (формула Сакура–Тетроде).

7. Представление чисел заполнения, каноническая и большая каноническая суммы для идеальных квантовых газов.

8. Числа заполнения в квантовых системах одинаковых частиц. Вывод выражения для средних чисел заполнения в идеальном одноатомном ферми-газе.

9. Числа заполнения в квантовых системах одинаковых частиц. Вывод выражения для средних чисел заполнения в идеальном одноатомном бозе-газе.

10. Квантовый идеальный одноатомный газ в больцмановском приближении. Квазиклассические поправки к уравнению состояния и теплоемкости идеального газа.

11. Вырожденный нерелятивистский одноатомный ферми-газ. Структура основного состояния и простейших возбуждений системы. Значения импульса и энергии на поверхности Ферми.

12. Получение низкотемпературного приближения для теплоемкости идеального нерелятивистского одноатомного ферми-газа.

13. Идеальный нерелятивистский одноатомный бозе-газ. Структура основного состояния системы и явление бозе-конденсации.

14. Вывод уравнения состояния идеального нерелятивистского одноатомного бозе-газа при низких температурах.

15. Модель идеального неодноатомного невырожденного газа. Адиабатическое приближение и вклад вращательного движения молекул в теплоемкость двухатомного невырожденного газа.

16. Модель идеального неодноатомного невырожденного газа. Адиабатическое приближение и вклад колебательного движения молекул в теплоемкость двухатомного невырожденного газа.

17. Среднее значение энергии гармонического осциллятора, находящегося при температуре θ, и получение формулы Планка для спектральной плотности энергии равновесного электромагнитного излучения. Вывод закона Стефана–Больцмана и закона смещения Вина.

18. Вывод выражения для теплоемкости твердого тела в высокотемпературном пределе и при низких температурах в рамках теорий Эйнштейна и Дебая.

19. Статистическая сумма неидеального классического одноатомного газа. Конфигурационный интеграл.

20. Выражение внутренней энергии равновесной классической системы с парным взаимодействием через двухчастичную корреляционную функцию.

21. Выражение свободной энергии равновесной классической системы с парным взаимодействием через двухчастичную корреляционную функцию.

22. Вывод первого уравнения цепочки Боголюбова для равновесных корреляционных функций.

23. Классические системы частиц с короткодействием. Вириальное разложение для корреляционных функций и уравнений состояния системы. Область применимости уравнения Ван дер Ваальса.

24. Дебаевская экранировка зарядов в равновесной двухкомпонентной классической системе с кулоновским взаимодействием. Вывод выражения для характерного радиуса экранировки.

25. Вывод уравнения состояния двухкомпонентной классической системы частиц с кулоновским взаимодействием.

Эти факты должны знать все

Каждый студент, сдающий экзамен по термодинамике и статистической физике в зимнюю сессию, должен быть в состоянии по памяти, без предварительной подготовки ответить на следующие вопросы (примерные ответы приведены в рамках)

1. Первое начало термодинамики в дифференциальной форме.

$$\boxed{\delta Q = \mathrm{d}\mathcal{E} + p\,\mathrm{d}V + A\,\mathrm{d}a - \mu\,\mathrm{d}N.}$$

2. Второе начало термодинамики для равновесного процесса в формулировке Клаузиуса в дифференциальной форме.

$$\boxed{\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{\theta}}$$

3. Коэффициент полезного действия цикла Карно.

$$\boxed{\eta = \frac{\theta_+ - \theta_-}{\theta_+}}$$

4. Формула для определения химического потенциала.

$$\boxed{\mu = \varepsilon - \theta s + pv}$$

5. Второе начало термодинамики для неравновесных процессов.

$$\boxed{\mathrm{d}S > \frac{\delta Q'}{\theta}}$$

6. Третье начало термодинамики в формулировке Планка.

$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} S(\theta, V, a, N) = 0}$$

7. Определения термодинамических потенциалов: свободной энергии $\mathcal{F}$, энтальпии H, потенциала Гиббса G, термодинамического потенциала «омега» Ω.

$$\boxed{\mathcal{F} = \mathcal{E} - \theta S, \quad H = \mathcal{E} + pV, \quad G = \mathcal{F} + pV = \mu N, \quad \Omega = \mathcal{F} - \mu N = -pV}$$

8. Разность удельных теплоемкостей и удельная внутренняя энергия идеального газа.

$$\boxed{c_p - c_v = 1, \quad \varepsilon = c_v\theta + \varepsilon_0 \quad (c_v = \mathrm{const},\ \varepsilon_0 = \mathrm{const})}$$

9. Уравнения состояния газа Ван-дер-Ваальса.

$$\boxed{\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \theta, \quad c_v = \text{const};}$$

10. Условие равновесия фаз в двухфазной системе.

$$\boxed{\mu_1(\theta, p) = \mu_2(\theta, p)}$$

11. Условия устойчивости состояния термодинамического равновесия газа по отношению к тепловым и механическим воздействиям.

$$\boxed{c_v > 0 \text{ (в термостате)}, \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_\theta < 0}$$

12. Условие термодинамического равновесия газа во внешнем поле.

$$\boxed{\mu(\theta, v) + U = const.}$$

13. Микроканоническое распределение Гиббса и его связь с макроскопическими термодинамическими величинами.

$$\boxed{\begin{gathered} w_n(\mathcal{E}, \delta E, V, a, N) = \frac{\Delta(E_n - \mathcal{E})}{\Gamma(\mathcal{E}, V, a, N)}, \qquad \Gamma(\mathcal{E}, V, a, N) = \sum_n \Delta(E_n - \mathcal{E}), \\ \Delta(E_n - \mathcal{E}) = \begin{cases} 1, & |E_n - \mathcal{E}| \leqslant \delta E, \\ 0, & |E_n - \mathcal{E}| > \delta E \end{cases} \\ S(\mathcal{E}, V, a, N) = \ln \Gamma(\mathcal{E}, V, a, N) \end{gathered}}$$

14. Каноническое распределение Гиббса и его связь с макроскопическими термодинамическими величинами.

$$\boxed{\begin{gathered} w_n(\theta, V, a, N) = \frac{1}{Z(\theta, V, a, N)} e^{-\frac{E_n}{\theta}}, \qquad Z(\theta, V, a, N) = \sum_n e^{-\frac{E_n}{\theta}}, \\ F(\theta, V, a, N) = -\theta \ln Z(\theta, V, a, N) \end{gathered}}$$

15. Большое каноническое распределение Гиббса и его связь с макроскопическими термодинамическими величинами.

$$\boxed{\begin{gathered} w_{Nn}(\theta, V, a, \mu) = \frac{1}{\zeta(\theta, V, a, \mu)} \mathrm{e}^{-\frac{E_{Nn} - \mu N}{\theta}}, \qquad \zeta(\theta, V, a, \mu) = \sum_N \sum_n e^{-\frac{E_{Nn} - \mu N}{\theta}}, \\ \Omega(\theta, V, a, \mu) = -\theta \ln \zeta(\theta, V, a, \mu) \end{gathered}}$$

16. Принцип Паули для чисел заполнения идеального квантового газа.

Если состояния системы одинаковых частиц описываются антисимметричными волновыми функциями, то числа заполнения одночастичных состояний N_p могут принимать только значения $0, 1$

17. Распределение Максвелла для частиц одноатомного газа по импульсам и скоростям.

$$\boxed{w(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p} = \frac{1}{(2\pi m\theta)^{3/2}} \mathrm{e}^{-\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m\theta}} d\boldsymbol{p}, \quad w(\boldsymbol{v})d\boldsymbol{v} = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{m|\boldsymbol{v}|^2}{2\theta}} d\boldsymbol{v}}$$

18. Выражения для импульса и энергии Ферми одночастичного идеального ферми-газа в отсутствие внешнего поля.

$$\boxed{p_F = \hbar \left(\frac{6\pi^2 n}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{6\pi^2 n}{\gamma}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

19. Формула Планка для спектральной плотности энергии равновесного электромагнитного излучения.

$$\boxed{u(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{\theta}} - 1}}$$

20. Формулы для средних чисел заполнения в распределениях Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна.

$$n_p = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{E_p - \mu}{\theta}} \pm 1},$$

знак «+» соответствует статистике Ферми–Дирака,

а знак «−» — статистике Бозе–Эйнштейна

21. Какая энергия приходится в состоянии равновесия в классической системе на одну колебательную степень свободы? на одну вращательную степень свободы? на одну степень свободы поступательного движения?

θ, $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}$ соответственно